# Méthodes variationnelles appliquées à l'équation du pendule forcé sans conservation

par

France Vaillancourt

mémoire présenté au Département de mathématiques et d'informatique
en vue de l'obtention du grade de maître ès sciences (M.Sc.)

FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Sherbrooke, Québec, Canada, juillet 2000

0-612-67336-7

Le 13 Juillet 2000, le jury suivant a accepté ce mémoire dans sa version finale.
date

Président-rapporteur: M. Pedro Morales
Département de mathématiques et d'informatique

Membre: M. Jean-Marc Belley
Département de mathématiques et d'informatique

Membre: M. Tomasz Kaczynski
Département de mathématiques et d'informatique

# SOMMAIRE

Mon mémoire porte sur l'étude de l'équation du pendule forcé sans conservation à l'aide des méthodes du calcul variationnel. La première partie de ce mémoire est consacrée à l'introduction des notions de base de l'analyse fonctionnelle. Ensuite, nous passons au problème des points critiques. En effet, dans ce deuxième chapitre, il nous faut étudier le potentiel associé à l'équation du pendule forcé sans conservation et en trouver les points critiques. C'est dans cette partie que le calcul variationnel intervient. On utilisera les techniques rattachées aux méthodes variationnelles pour montrer que le potentiel est strictement convexe et, en appliquant un résultat d'analyse fonctionnelle, on pourra en déduire l'existence de points critiques. Ceux-ci nous serviront par la suite, au chapitre trois, à démontrer l'existence et l'unicité des solutions de l'équation du pendule. Pour ce faire, nous emploierons des arguments qui utilisent les projections sur les espaces appropriés. Nous terminerons ce mémoire par un résultat qui regroupe les énoncés présentés auparavant et qui nous permet de conclure que l'équation du pendule forcé sans conservation possède une solution périodique.

# REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier mon directeur Jean-Marc Belley pour son aide et ses encouragements tout au long de ma maîtrise. De plus, je remercie l'Université de Sherbrooke ainsi que M. Kaczynski pour les bourses qui m'ont été accordées.

Je profite de l'occasion pour remercier mes collègues de maîtrise ( la gang du 1021 ) pour leur support moral autant au plan professionnel que personnel. Un merci tout spécial aux amis du bacc ( Mario, Jennifer et Catherine ), avec lesquels les années ont passé bien vite. Je veux ensuite remercier mes parents pour leur soutien et leur présence pendant toutes mes études. Finalement, je dois remercier mon conjoint Eric pour son support et son amour depuis toujours.

# TABLE DES MATIÈRES

# INTRODUCTION

Plusieurs méthodes sont utilisées pour montrer l'existence de solutions à l'équation du pendule ( simple ou double ) avec ou sans conservation. Ce mémoire s'inspire grandement de l'article [1].

Notons d'abord les techniques de solutions supérieures et inférieures. En effet, ces méthodes ont été employées dans [8] pour le problème

$$x'' + f(x)x' + a\sin x = e(t)$$
$$x(0) - x(2\pi) = x'(0) - x'(2\pi) = 0$$

avec $a > 0$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et périodique. De plus, $e = \overline{e} + \tilde{e}(t)$ où $\tilde{e}(t) \in \widetilde{C}([0,2\pi])$ ( l'ensemble des fonctions continues sur $[0,2\pi]$ de moyenne nulle ); c'est-à-dire $\overline{e} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e(t)\mathrm{d}t$ et $\int_0^{2\pi} \tilde{e}(t)\mathrm{d}t = 0$. Les auteurs, Mawhin et Willem, ont alors montré que, pour tout $\tilde{e}$, un certain ensemble ( voir [8] ) pour lequel le problème est résoluble est un intervalle fermé non vide contenu dans le segment $[-a,a]$. La théorie des degrés a aussi été utilisée dans [8], mais sous d'autres conditions. De plus, le lemme du col de la montagne a été appliqué pour montrer l'existence d'au moins deux solutions à l'équation du pendule avec conservation, c'est-à-dire lorsque $f \equiv 0$, pour tout $e$ avec valeur moyenne nulle.

Aussi, les méthodes de solutions supérieures et inférieures avec des arguments sur le degré sont employées dans [5] pour caractériser l'ensemble des fonctions $e \in L(0,T)$, avec $T > 0$, telles que l'équation $y'' + cy' + A\sin y = e(t)$ admet une solution T-périodique ( où $A, c \in \mathbb{R}$ et $A > 0$ ). Les auteurs, Fournier et Mawhin, affirment entre autre que lorsqu'on pose $\bar{e} = \frac{1}{T}\int_0^T e(t)\mathrm{d}t$, $\tilde{e} = e - \bar{e}$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, et que si $\omega^{-1}(\omega^2 + c^2)^{-1/2}A \leq \delta(\tilde{e})$ où $\delta(\tilde{e}) = \left[(\frac{1}{T}\int_0^T \sin\widetilde{E}(t)\mathrm{d}t)^2 + (\frac{1}{T}\int_0^T \cos\widetilde{E}(t)\mathrm{d}t)^2\right]^{1/2}$ où $\widetilde{E}$ est l'unique solution T-périodique avec moyenne nulle de $y''(t) + cy'(t) = \tilde{e}(t)$, alors l'équation $y''(t) + cy'(t) + A\sin y = e(t)$ possède une solution T-périodique lorsque $|\bar{e}| \leq A(\delta(\tilde{e}) - \omega^{-1}(\omega^2+c^2)^{-1/2}A)$.

D'un autre côté, les méthodes du calcul variationnel sont, elles aussi, utilisées pour démontrer l'existence de solutions à des équations du type pendule, voir [10], [7]. Dans [10], on considère le problème

$$y'' + cy' + A\sin y = f + r$$
$$y(0) = y(T) \text{ et } y'(0) = y'(T)$$

où $r \in \mathbb{R}$, $f \in L^2$ telle que $\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t = 0$ et on montre que ses solutions sont les points critiques d'un potentiel. Pour ce faire, on a étudié l'équation modifiée

$$x'' + cx' + A\sin(x+s) = f + r$$
$$x(0) = x(T) = 0 \text{ et } x'(0) = x'(T)$$

où $A,r,s \in \mathbb{R}$, $c > 0$. Le potentiel associé, donné comme suit

$$\phi(x,s,r) = \int_0^T e^{ct}\big[\frac{(x')^2}{2} + A\cos(x+s) + x(f+r)\big]\mathrm{d}t,$$

est strictement convexe et possède un unique point critique lorsque $c^2 + |A|e^{cT} > |A|(1 + cTe^{cT})$. Sous ces conditions, on a montré que pour tout $s \in \mathbb{R}$, il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que l'équation modifiée admet une unique solution faible T-périodique. D'autres conditions ont aussi été énoncées pour arriver à des résultats similaires. Voir, par exemple, [2].

Cependant, on a longtemps cru que l'équation du pendule forcé sans conservation

$$x'' + 2cx' + A\sin x = f \tag{1}$$

où $2c > 0$, $A > 0$ et $f$ est périodique, n'était pas variationnelle. Le but de ce mémoire est de montrer par les méthodes du calcul variationnel que, sous la condition $0 < \sqrt{A} < c$, l'équation (1) admet des solutions périodiques. Notre travail sera divisé de la façon suivante.

On débutera avec un chapitre de préliminaires incluant les notions essentielles à la compréhension générale des éléments apportés au cours de ce mémoire. Ensuite, nous parlerons du problème des points critiques du potentiel associé à l'équation du pendule forcé sans conservation. Finalement, nous nous attarderons sur la question de l'existence et de l'unicité des solutions de l'équation du pendule.

# CHAPITRE 1

# Préliminaires

Dans ce chapitre, comme mentionné précédemment, nous établissons certains résultats bien connus qui sont nécessaires à notre étude de l'équation du pendule forcé sans conservation. Nous mettons ainsi en place des notations que nous utiliserons tout au long de ce mémoire.

## 1.1 La topologie faible sur un espace de Banach

Nous allons ici nous concentrer sur la notion de convergence faible. Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet. Dans ce mémoire, tout espace de Banach est réel et toute forme linéaire sur cet espace est à valeurs réelles. Si $E$ est un espace de Banach avec norme $\|\cdot\|_E$ , nous écrivons $E'$ pour désigner l'espace dual de $E$ qui consiste en la classe des formes linéaires sur $E$ qui sont continues par rapport à la topologie sur $E$ associée à la norme $\|\cdot\|_E$ . Lorsque $E'$ est muni de la norme $\|f\|_{E'} = \sup\{f(x) : x \in E, \|x\|_E \leq 1\}$ nous obtenons encore un espace de Banach. La notation $x_n \to x$ est utilisée pour indiquer la convergence en norme sur $E$. Dans ce cas, on dit que $x_n$ converge fortement vers $x$ et que la topologie générée par la norme est la topologie forte sur $E$.

**Définition 1** *La topologie faible sur un espace de Banach $E$ est la topologie la moins fine sur $E$ rendant continue tout élément de $E'$.*

Nous écrivons $\sigma(E,E')$ pour désigner la topologie faible sur un espace de Banach $E$ avec espace dual $E'$.

**Remarque 1** *La topologie faible $\sigma(E,E')$ est séparée.*

**Démonstration**: [3] Soient $x_1,x_2 \in E$ tels que $x_1 \neq x_2$. D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe un hyperplan fermé séparant $\{ x_1 \}$ et $\{ x_2 \}$ au sens strict. Donc, il existe $f \in E'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $f(x_1) < \alpha < f(x_2)$. On pose:

$$U = \{x \in E : f(x) < \alpha\} = f^{-1}(]-\infty,\alpha[)$$
$$V = \{x \in E : f(x) > \alpha\} = f^{-1}(]\alpha,\infty[).$$

$U$ et $V$ sont des ouverts pour $\sigma(E,E')$ qui vérifient $x_1 \in U$, $x_2 \in V$ et $U \cap V = \emptyset$. ■

Si, par rapport à la topologie faible $\sigma(E,E')$, une suite $\{x_n\} \subset E$ converge vers $x \in E$, alors on dit que $x_n$ converge faiblement vers $x$ et on écrit $x_n \rightharpoonup x$. Une combinaison convexe d'éléments d'un espace vectoriel $E$ est une somme de la forme $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ où $x_i \in E$, $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ et $n \in \mathbb{N}$ est arbitraire. Toute partie de $E$ fermée par rapport à toute combinaison convexe est dite convexe.

**Théorème 1** *Soit $C$ une partie convexe d'un espace de Banach $E$. Alors l'adhérence $\overline{C}^s$ de $C$ par rapport à la topologie forte sur $E$ est égale à son adhérence $\overline{C}^w$ par rapport à la topologie faible $\sigma(E,E')$.*

**Démonstration**: [11] En vertu du fait que la topologie $\sigma(E,E')$ est moins fine que la topologie forte, nous avons nécessairement $\overline{C}^s \subseteq \overline{C}^w$. Pour obtenir l'inclusion inverse, soit $x_0 \in E\backslash\overline{C}^s$. Par le théorème de Hahn-Banach, il existe $f \in E'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in \overline{C}^s$, $f(x_0) < \alpha < f(x)$. Donc, l'ensemble $V = f^{-1}(]-\infty,\alpha[)$ est un voisinage faible de $x_0$ tel que $V \cap C = \emptyset$. Ainsi, $x_0 \notin \overline{C}^w$ et donc $\overline{C}^w \subseteq \overline{C}^s$. ∎

Nous donnons maintenant un résultat important dû à Mazur.

**Théorème 2 (Mazur)** *Soit $\{x_n\}$ une suite faiblement convergente vers $x$ dans un espace de Banach $E$. Alors, il existe une suite de combinaisons convexes d'éléments de $\{x_n\}$ qui converge fortement vers $x$.*

**Démonstration**: [9] La classe $C$ des combinaisons convexes de $\{x_n\}$ est convexe. Donc, $\overline{C}^s = \overline{C}^w$. Or, $x_n \rightharpoonup x$ implique que $x \in \overline{C}^w$ et donc $x \in \overline{C}^s$. Donc, il existe une suite de $C$ qui converge fortement vers $x$. ∎

**Définition 2** *Soit $\varphi$ une fonction définie sur un espace de Banach $E$ et à valeurs dans* $]-\infty,\infty]$.

*i)* *$\varphi$ est semi-continue inférieurement ( s.c.i. ) si pour tout $x \in E$ on a* $\liminf_{y \to x} \varphi(y) \geq \varphi(x)$.
*ii)* *$\varphi$ est faiblement semi-continue inférieurement ( f.s.c.i. ) si pour tout $x \in E$ on a* $\liminf_{y \rightharpoonup x} \varphi(y) \geq \varphi(x)$.
*iii)* *$\varphi$ est convexe si $\varphi((1-t)x + ty) \leq (1-t)\varphi(x) + t\varphi(y)$ pour tout $t \in [0,1]$ et tout $x,y \in E$.*

Voyons maintenant un corollaire qui est en fait une application du théorème de Mazur.

**Corollaire 1** *Si $\varphi$ est une fonction convexe s.c.i. sur un espace de Banach $E$ et à valeurs dans $]-\infty,\infty]$, alors $\varphi$ est f.s.c.i.*

**Démonstration**: [9] Soit $\{x_n\}$ une suite dans $E$ telle que $x_n \rightharpoonup x$ et soit $c > \liminf(x_n)$. Alors, il existe $\{x_{n_j}\} \subset \{x_n\}$ telle que $x_{n_j} \rightharpoonup x$ et $c > \varphi(x_{n_j})$ pour tout $j$. D'après le théorème de Mazur, il existe $v_k = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{jk} x_{n_j}$ tel que $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{jk} = 1$, $\alpha_{jk} \geq 0$ et $v_k \to x$. Puisque $\varphi$ est s.c.i. et convexe, nous avons les inégalités suivantes:

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &\leq \liminf_{k\to\infty} \varphi(v_k) \\
&\leq \liminf_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{jk}\varphi(x_{n_j}) \\
&\leq (\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{jk})c \\
&= c \quad \text{pour tout } c > \liminf \varphi(x_n)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(x) \leq \liminf \varphi(x_n) \qquad \blacksquare$$

## 1.2 La réflexivité

Étant donné un espace de Banach $E$ avec dual $E'$, soit $E''$ son bidual et $J : E \to E''$ l'injection canonique ( voir, par exemple, [3] p.39 ). On dit que $E$ est réflexif si $J(E) = E''$. On définit aussi $B_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$, la boule unité sur $E$.

**Définition 3** *Un espace de Banach $E$ est uniformément convexe si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta_\epsilon > 0$ tel que*

$$\left.\begin{array}{l} x,y \in B_E \\ \|x-y\| > \epsilon \end{array}\right\} \Rightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1 - \delta_\epsilon\,.$$

Nous avons aussi besoin de deux lemmes, le premier étant de Helley et le second de Goldstine.

**Lemme 1** *Soient $E$ un espace de Banach, $f_1,f_2,\cdots,f_n \in E'$ et $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n \in \mathbb{R}$ fixés. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

*i) pour tout $\epsilon > 0$, il existe $x_\epsilon \in E$ tel que $\|x_\epsilon\| \leq 1$ et $|f_i(x_\epsilon) - \alpha_i| < \epsilon$ pour tout $i = 1,2,\cdots,n$.*

*ii) $|\sum_{i=1}^n \beta_i\alpha_i| \leq \|\sum_{i=1}^n \beta_i f_i\|$ pour tout $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n \in \mathbb{R}$.*

**Démonstration**: [3]

i) $\Rightarrow$ ii) $\quad \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n \in \mathbb{R} \Rightarrow |\sum_{i=1}^n \beta_i f_i(x_\epsilon) - \sum_{i=1}^n \beta_i\alpha_i| \leq \epsilon\sum_{i=1}^n |\beta_i|$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow |\sum_{i=1}^n \beta_i\alpha_i| &\leq |\sum_{i=1}^n \beta_i f_i(x_\epsilon)| + \epsilon\sum_{i=1}^n |\beta_i| \\
&\leq \|\sum_{i=1}^n \beta_i f_i\|\|x_\epsilon\| + \epsilon\sum_{i=1}^n |\beta_i| \\
&\leq \|\sum_{i=1}^n \beta_i f_i\| + \epsilon\sum_{i=1}^n |\beta_i| \text{ pour tout } \epsilon > 0 \\
\Rightarrow |\sum_{i=1}^n \beta_i\alpha_i| &\leq \|\sum_{i=1}^n \beta_i f_i\|
\end{aligned}$$

ii) $\Rightarrow$ i) $\quad$ Soient $\vec{a} = [\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n] \in \mathbb{R}^n$ et $\vec{\varphi} : E \to \mathbb{R}^n$ telle que $\vec{\varphi}(x) = [f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)]$.

$$
\begin{aligned}
\text{Or } \vec{\alpha} \notin \overline{\vec{\varphi}(B_E)} \;&\Rightarrow\; \text{il existe un hyperplan qui sépare strictement } \vec{\alpha} \text{ et } \vec{\varphi}(B_E).\\
&\Rightarrow\; \text{il existe } \vec{\beta} = [\beta_1, \cdots, \beta_n] \in \mathbb{R}^n \text{ et } \gamma \in \mathbb{R} \text{ tels que}\\
&\qquad \vec{\varphi}(x) \cdot \vec{\beta} < \gamma < \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \text{ pour tout } x \in B_E.\\
&\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i(x) < \gamma < \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i \text{ pour tout } x \in B_E.\\
&\Rightarrow\; \|\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i\| \leq \gamma < \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i \text{ ce qui contredit ii).} \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

**Définition 4** *La topologie faible $\star$ sur l'espace dual $E'$ d'un espace de Banach $E$ est la topologie la moins fine sur $E'$ rendant continu toutes les fonctionnelles dans $J(E)$. Nous écrivons $\sigma(E',E)$ pour désigner cette topologie.*

**Lemme 2** *Soit $E$ un espace de Banach. Alors $J(B_E)$ est dense dans $B_{E''}$ pour la topologie faible $\star$ sur $E''$, c'est-à-dire $\sigma(E'',E')$.*

**Démonstration**: [3] Soient $\xi \in B_{E''}$ et $V$ un voisinage de $\xi$ pour la topologie $\sigma(E'',E')$. On veut montrer que $J(B_E) \cap V \neq \emptyset$. On peut supposer que $V$ est de la forme: $V = \{\eta \in E'' : |(\eta - \xi)(f_i)| < \epsilon, \forall i = 1, \cdots, n\}$ où $f_i \in E'$ pour tout $i = 1, \cdots, n$. Il s'agit de trouver $x \in B_E$ tel que $|f_i(x) - \xi(f_i)| < \epsilon$, pour tout $i = 1, \cdots, n$. Posons $\alpha_i = \xi(f_i)$. Alors, pour tout $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n \in \mathbb{R}$ on a: $|\sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i| = |\xi(\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i)| \leq \|\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i\|$. D'après le lemme précédent, il existe $x_\epsilon \in B_E$ tel que $|f_i(x_\epsilon) - \alpha_i| < \epsilon$ pour tout $i = 1, \cdots, n$, c'est-à-dire que $J(x_\epsilon) \in J(B_E) \cap V$. $\blacksquare$

Énonçons maintenant le théorème qui nous permettra de savoir que les espaces d'Hilbert sont réflexifs.

**Théorème 3** *Tout espace de Banach uniformément convexe est réflexif.*

**Démonstration**: [3] Soit $\xi \in E''$ avec $\|\xi\| = 1$. On cherche à montrer que $\xi \in J(B_E)$. Comme $J(B_E)$ est fermé fortement dans $E''$, il suffit de prouver que

$$\text{pour tout } \epsilon > 0, \quad \text{il existe } x \in B_E \text{ tel que } \|\xi - J(x)\| < \epsilon.$$

Soit $\epsilon > 0$ fixé et soit $\delta > 0$ qui correspondent à la définiton de l'uniforme convexité. On choisit $f \in E'$ avec $\|f\| = 1$ tel que

$$< \xi,f > > 1 - \frac{\delta}{2} \tag{1.1}$$

Posons

$$V = \left\{ \eta \in E'' : | < \eta - \xi,f > | < \frac{\delta}{2} \right\}$$

de sorte que $V$ est un voisinage de $\xi$ pour la topologie $\sigma(E'',E')$. D'après le Lemme 2, on sait que $V \cap J(B_E) \neq \emptyset$, donc il existe $x \in B_E$ tel que $J(x) \in V$. Il reste à montrer que $\xi \in J(x) + \epsilon B_{E''}$ pour tout $\epsilon > 0$. Procédons par l'absurde; supposons que $\xi \in \complement(J(x) + \epsilon B_{E''}) = W$. Notons que $W$ est aussi un voisinage de $\xi$ pour la topologie $\sigma(E'',E')$ ( puisque $B_{E''}$ est fermée pour la topologie $\sigma(E'',E')$ ). En appliquant à nouveau le Lemme 2, on a: $(V \cap W) \cap J(B_E) \neq \emptyset$. Donc, il existe $\hat{x} \in B_E$ tel que $J(\hat{x}) \in V \cap W$. On obtient alors, puisque $J(x) \in V$ et $J(\hat{x}) \in V$

$$| < f,x > - < \xi,f > | < \frac{\delta}{2}$$
$$| < f,\hat{x} > - < \xi,f > | < \frac{\delta}{2}$$

Donc, en additionnant, on obtient

$$2 < \xi,f > \leq < f,x + \hat{x} > +\delta \leq \|x + \hat{x}\| + \delta$$

et d'après (1.1), on a $\|\frac{x+\hat{x}}{2}\| \geq 1 - \delta$ ( d'après la convexité uniforme ) $\|x + \hat{x}\| \leq \epsilon$. Mais, $J(\hat{x}) \in W$ donc, $\|J(\hat{x}) - J(x)\| > \epsilon$ et puisque $J$ est une isométrie on a $\|\hat{x} - x\| > \epsilon$, ceci est une contradiction.

Donc, on a $\xi \in J(x) + \epsilon B_{E''}$ , c'est-à-dire qu'il existe $x_0 \in B_E$ et $\eta_0 \in B_{E''}$ tels que $\xi = J(x_0) + \epsilon\eta_0$. D'où,

$$||\xi - J(x_0)|| = ||\epsilon\eta_0|| = \epsilon||\eta_0|| \leq \epsilon.$$

Ainsi, on a $\xi \in J(B_E)$ et $\partial B_{E''} \subseteq J(B_E)$ ce qui nous donne $J(B_E) = B_{E''}$ et par conséquent, $J(E) = E''$. Nous pouvons donc conclure que $E$ est réflexif. ■

Le prochain résultat nous permettra de conclure, avec le théorème précédent, que les espaces d'Hilbert sont réflexifs. Tout d'abord, nous allons donner la définition d'un espace d'Hilbert, car ce sont ces espaces qui nous intéressent tout particulièrement.

**Définition 5** *Un espace d'Hilbert est un espace vectoriel $H$ muni d'un produit scalaire $< x,y >$ qui est complet pour la norme $||x|| = \sqrt{< x,x >}$.*

**Proposition 1** *Soit $H$ un espace d'Hilbert quelconque. $H$ est uniformément convexe.*

**Démonstration**: [3] Soient $\epsilon > 0$, $u,v \in H$ tels que $||u|| \leq 1, ||v|| \leq 1$ et $||u-v|| > \epsilon$. Par l'identité du parallélogramme, on a : $||\frac{u+v}{2}||^2 = \frac{1}{2}[||u||^2 + ||v||^2] - ||\frac{u-v}{2}||^2 < \frac{1}{2}[1+1] - \frac{\epsilon^2}{4} \Rightarrow ||\frac{u+v}{2}|| < 1 - \delta$ où $\delta = 1 - \sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{4}} > 0$. ■

Maintenant il est clair que $H$ est réflexif. [6]

## 1.3 La compacité faible

On dit qu'un sous-ensemble d'un espace de Banach $E$ est faiblement compact s'il est compact par rapport à la topologie faible $\sigma(E,E')$. Un sous-ensemble du dual $E'$ de $E$ est faible $\star$ compact s'il est compact par rapport à la topologie faible $\star$, c'est-à-dire par rapport à la topologie $\sigma(E',E)$. Comme le montre le résultat suivant, une boule fermée bornée dans $E'$ est faible $\star$ compact même si elle n'est pas compact par rapport à la topologie forte sur $E'$, comme c'est le cas lorsque $E$ est de dimension infinie. Voir, par exemple, [11].

**Théorème 4 ( Banach-Alaoglu )** *Soit $E$ un espace de Banach et $E'$ son dual. L'ensemble $B_{E'} = \{f \in E' : \|f\|_{E'} \leq 1\}$ est compact par rapport à la topologie faible $\star$, c'est-à-dire par rapport à la topologie $\sigma(E',E)$.*

Avant de démontrer ce théorème, nous allons énoncer une proposition que nous utiliserons.

**Proposition 2** *Soient $Z$,$Y_i$ ( où $i \in I$ ) des espaces topologiques et soit $\psi : Z \to \prod_{i \in I} Y_i$. Alors $\psi$ est continue $\Longleftrightarrow$ $\varphi_i \circ \psi : Z \to Y_i$ est continue pour tout $i \in I$ ( où $\varphi_i : \prod_{i \in I} \to Y_i$ sont les projections ).*

**Démonstration** : [3]

$\Rightarrow$ ) trivial

$\Leftarrow$ ) Soit $U$ un ouvert de $\displaystyle\prod_{i \in I} Y_i$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} U &= \cup_{quelconque} \cap_{finie} \varphi_i^{-1}(V_i) \text{ avec } V_i \text{ un ouvert de } Y_i \\ \Rightarrow \psi^{-1}(U) &= \cup_{quelconque} \cap_{finie} \psi^{-1}[\varphi_i^{-1}(V_i)] \\ &= \cup_{quelconque} \cap_{finie} (\varphi_i \circ \psi)^{-1}(V_i) \text{ un ouvert de } Z. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

**Démonstration**( B.-A. ) : [3] Soit $Y = \mathbb{R}^E$. C'est-à-dire, $w \in Y \Longleftrightarrow w = \{w_x\}_{x \in E}$ avec $w_x \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in E$. Soit $Y$ muni de la topologie produit. Considérons

$$\begin{aligned} \Phi : (E',\sigma(E',E)) &\to Y \\ f &\longmapsto \{f(x)\}_{x \in E} \end{aligned}$$

$\Phi$ est continue, car $proj_x \circ \Phi(f) = f(x)$ est continue sur $(E',\sigma(E',E))$ pour tout $x \in E$ et, d'après la proposition, on conclut que $\Phi$ est continue sur $(E',\sigma(E',E))$.
$\Phi$ est injective, car $\Phi(f_1) = \Phi(f_2) \Leftrightarrow (f_1 - f_2)(x) = 0$ pour tout $x \in E \Leftrightarrow f_1 - f_2 = 0$.
$\Phi^{-1}$ est continue sur $\Phi(E') = \{\{f(x)\}_{x\in E} : f \in E'\}$ par rapport à la topologie produit sur $Y$, car

$$
\begin{aligned}
w = \{f(x)\}_{x\in E} \in \Phi(E') \quad &\Rightarrow \quad (\Phi^{-1}(w))(x) = f(x) \equiv w_x \\
&\Rightarrow \quad \Phi(E') \subset Y \to \mathbb{R} \text{ est continue pour tout } x \in E \\
&\qquad\qquad\qquad w \longmapsto w_x
\end{aligned}
$$

d'où, d'après la Proposition 2, $\Phi^{-1}$ est continue par rapport à la topologie produit.
L'ensemble $\Phi(B_{E'}) \equiv \{w \in Y : |w_x| \leq \|x\|, w_{x+y} = w_x + w_y, w_{\lambda x} = \lambda w_x$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $x,y \in E\}$ est compact dans $Y$ par rapport à la topologie produit. En effet, $K_1 = \{w \in Y : |w_x \leq \|x\|_E$ pour tout $x \in E\} = \prod_{x\in E}[-\|x\|_E,\|x\|_E]$ est compact. De plus, $K_2 = \{w \in Y : w_{x+y} = w_x + w_y, w_{\lambda x} = \lambda w_x$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R},\ x,y \in E\}$ est fermé puisque pour chaque $\lambda \in \mathbb{R},\ x,y \in E$ fixés les ensembles $A_{x,y} = \{w \in Y : w_{x+y} - w_x - w_y = 0\}$ et $B_{\lambda,x} = \{w \in Y : w_{\lambda,x} - \lambda w_x = 0\}$ sont fermés ( car les applications $w \mapsto w_{x+y} - w_x - w_y$ et $w \mapsto w_{\lambda,x} - \lambda w_x$ sont continues ) et que $K_2 = (\cap_{x,y\in E} A_{x,y}) \cap (\cap_{x\in E,\lambda\in\mathbb{R}} B_{\lambda,x})$. Donc, $\Phi(B_{E'}) = K_1 \cap K_2$ est compact dans $Y$. Ainsi, $B_{E'} = \Phi^{-1}\Phi(B_{E'})$ est compact par rapport à $\sigma(E',E)$. ■

**Théorème 5** *Si $E$ est un espace de Banach réflexif avec norme $\|\cdot\|_E$, alors la boule $B_E = \{x \in E : \|x\|_E \leq 1\}$ est faiblement compact dans $E$.*

**Démonstration**: [3] Supposons que $E$ est réflexif. Alors $J(B_E) = B_{E''}$.
D'autre part, d'après le théorème de Banach-Alaoglu, $B_{E''}$ est compact pour la topologie $\sigma(E'',E')$. Il suffit donc de vérifier que $J^{-1}$ est continue de $E''$ muni de $\sigma(E'',E')$ à valeurs

dans $E$ muni de $\sigma(E,E')$. On veut montrer que, pour tout $f \in E'$ fixé, l'application $\xi \mapsto f(J^{-1}(\xi))$ est continue sur $E''$ muni de $\sigma(E'',E')$. Or, $f(J^{-1}(\xi)) = \xi(f)$ et l'application $\xi \mapsto \xi(f)$ est bien continue sur $E''$ muni de $\sigma(E'',E')$. ■

Donc, toute boule fortement fermée dans un espace de Banach réflexif est faiblement compact. Puisque tout espace d'Hilbert est réflexif, nous obtenons le corollaire suivant.

**Corollaire 2** *Toute boule fortement fermée et bornée dans un espace d'Hilbert est faiblement compacte.*

**Proposition 3** *Soit $E$ un espace de Banach réflexif. Soit $K \subset E$ un sous-ensemble convexe, fermé et borné. Alors, $K$ est compact pour la topologie $\sigma(E,E')$*

**Démonstration**: [3] $K$ est fermé pour la topologie $\sigma(E,E')$ d'après le Théorème 1. D'autre part, il existe une constante $m$ telle que $K \subset mB_E$ et $mB_E$ est compact pour $\sigma(E,E')$ suivant le Théorème 5. ■

**Proposition 4** *Soient $E$ un espace de Banach réflexif, $A \subset E$ un convexe fermé, non vide et $\varphi : A \to ]-\infty,\infty]$ une fonction convexe, s.c.i., $\varphi \not\equiv \infty$ telle que $\lim_{\|x\| \to \infty_{x \in A}} \varphi(x) = \infty$ ( coercivité )($\star$). Alors, $\varphi$ atteint son minimum sur $A$, c'est-à-dire qu'il existe $x_0 \in A$ tel que $\varphi(x_0) = \min_{x \in A} \varphi(x)$.*

**Démonstration**: [3] $\varphi \not\equiv \infty \Rightarrow \exists\, a \in A$ tel que $\varphi(a) < \infty$. On considère $\widetilde{A} = \{x \in A : \varphi(x) \leq \varphi(a)\}$. Comme $A$ est fermé, convexe et que $\varphi$ est convexe, s.c.i., on a que $\widetilde{A}$ est convexe fermé et d'après ($\star$) borné. Donc, d'après la Proposition 3 et le Théorème 1, $\widetilde{A}$ est compact pour la topologie $\sigma(E,E')$. D'autre part, $\varphi$ est s.c.i. pour la topologie $\sigma(E,E')$. D'où $\varphi$ atteint son minimum sur $\widetilde{A}$: il existe $x_0 \in \widetilde{A}$ tel que $\varphi(x_0) \leq \varphi(x)\ \forall x \in \widetilde{A}$. Comme $\widetilde{A} = \{x \in A : \varphi(x) \leq \varphi(a)\}$, on a que $a \in \widetilde{A}$, donc $\varphi(x_0) \leq \varphi(a)$. Si $x \in A \backslash \widetilde{A}$ on a $\varphi(x_0) \leq \varphi(a) \leq \varphi(x)$. Donc, $\varphi(x_0) \leq \varphi(x)\ \forall x \in A$. ■

# CHAPITRE 2

# Problème de point critique

Nous allons débuter ce chapitre par une série d'énoncés nous permettant de mettre en place les espaces qui seront utilisés dans la suite de ce mémoire. Nous en profitons aussi pour mettre en place d'autres notations en plus de celles introduitent au chapitre 1.

Pour $T > 0$, posons $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ et soit $\Gamma$ le groupe monogène défini par $\{n\omega : n \in \mathbb{Z}\}$.

**Définition 6** *On écrit $L^1(\Gamma)$ pour désigner la classe des fonctions $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui sont le prolongement $T$-périodique d'une fonction intégrable sur le segment $[0,T]$ , Sur l'espace $L^1(\Gamma)$ on a la norme $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T |x(t)|\mathrm{d}t < \infty$ et la moyenne $\overline{x} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T x(t)\mathrm{d}t$.*

Nous identifions un élément $x$ quelconque de $L^1(\Gamma)$ avec sa série de Fourier moyennant la notation $x(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{x}(n)e^{in\omega t}$ où $\hat{x}(n) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T x(t)e^{-in\omega t}\,\mathrm{d}t$. Donc, $\hat{x}(0) = \overline{x}$ et puisque $x$ est à valeurs réelles, $\hat{x}(-n)$ est le conjugué complexe de $\hat{x}(n)$.

Étant donné un sous-ensemble $S$ de $L^1(\Gamma)$, on écrit $\widetilde{S}$ pour désigner la classe $\{\tilde{x} = x - \overline{x} : x \in S\} \subset L^1(\Gamma)$. Un sous-espace important de $L^1(\Gamma)$ est l'espace d'Hilbert $L^2(\Gamma) = \{x \in L^1(\Gamma) : \displaystyle\int_0^T |x(t)|^2\mathrm{d}t < \infty\}$ muni de la norme $\|x\|_2 = \left[\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T |x(t)|^2\mathrm{d}t\right]^{1/2}$

et du produit scalaire $< x,y >_2 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)y(t)\,\mathrm{d}t$. Un autre sous-espace important de $L^1(\Gamma)$ consiste en la classe $P(\Gamma)$ des polynômes trigonométriques réels $p(t) = \sum_{\lambda\in\Gamma}\hat{p}(\lambda)e^{i\lambda t}(t \in \mathbb{R})$ avec $\hat{p}(\lambda) = 0$ sauf pour au plus un nombre fini de $\lambda \in \Gamma$ où $\hat{p}(-\lambda)$ est le conjuqué complexe de $\hat{p}(\lambda)$ ; et $\widetilde{P}(\Gamma) = \{p \in P(\Gamma) : \hat{p}(0) = 0\}$. Nous utiliserons encore un autre sous-espace important de $L^1(\Gamma)$, soit la complétion uniforme de $P(\Gamma)$. Ce sous-espace de $L^2(\Gamma)$, désigné par $C(\Gamma)$, est précisément la famille des fonctions réelles continues et $T$-périodiques sur $\mathbb{R}$. De plus, on écrit $\widetilde{C}(\Gamma)$ pour désigner la complétion uniforme de $\widetilde{P}(\Gamma)$.

**Définition 7** *Pour tout $l \in \mathbb{R}$ donné, $H_l(\Gamma) \subset L^2(]-\infty,l],e^{2ct}\mathrm{d}t)$ est le complété de $P(\Gamma)$ par rapport à la norme $\left[\int_{-\infty}^{l}\left[e^{ct}p(t)\right]^2\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{l}\left[(e^{ct}p(t))'\right]^2\mathrm{d}t\right]^{1/2}$. De plus, on écrit $\widetilde{H}_l(\Gamma)$ pour désigner la complétion de $\widetilde{P}(\Gamma)$ par rapport à la même norme.*

## 2.1 Une inégalité de type Sobolev

Maintenant que toutes les définitions préliminaires ont été mises en place, nous pouvons passer au sujet qui nous intéresse dans ce chapitre, soit le problème de point critique.

**Lemme 3** *Pour tout $p \in P(\Gamma)$, $c > 0$ et $s \in ]-\infty,l] \subseteq \mathbb{R}$ on a :*

$$|e^{cs}p(s)| \leq \sqrt{2}\left[\int_{-\infty}^{l}|e^{ct}p(t)|^2\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{l}|(e^{ct}p(t))'|^2\mathrm{d}t\right]^{1/2}$$

**Démonstration** :

$$\begin{aligned}
|e^{2cs}p^2(s)| &= \left|\int_{-\infty}^{s}(e^{2ct}p^2(t))'\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{s}\left|(e^{2ct}p^2(t))'\right|\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{s}\left|\left[(e^{ct}p(t))^2\right]'\right|\mathrm{d}t \\
&= 2\int_{-\infty}^{s}\left|e^{ct}p(t)\right|\left|(e^{ct}p(t))'\right|\mathrm{d}t \\
&\leq 2\sqrt{\int_{-\infty}^{s}\left|e^{ct}p(t)\right|^2\mathrm{d}t}\sqrt{\int_{-\infty}^{s}\left|(e^{ct}p(t))'\right|^2\mathrm{d}t} && (2.1) \\
&\leq \left[\sqrt{\int_{-\infty}^{s}\left|e^{ct}p(t)\right|^2\mathrm{d}t}+\sqrt{\int_{-\infty}^{s}\left|(e^{ct}p(t))'\right|^2\mathrm{d}t}\right]^2 \\
&\leq 2\left[\int_{-\infty}^{s}\left|e^{ct}p(t)\right|^2\mathrm{d}t+\int_{-\infty}^{s}\left|(e^{ct}p(t))'\right|^2\mathrm{d}t\right] && (2.2)
\end{aligned}$$

L'inégalité (2.1) découle de l'inégalité de Hölder:

$\|f\cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_{p'}$ où $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$

L'inégalité (2.2) découle de l'inégalité de Cauchy:

$|\sum_{n=1}^{k}\alpha_n\beta_n| \leq (\sum_{n=1}^{k}|\alpha_n|^2)^{1/2}(\sum_{n=1}^{k}|\beta_n|^2)^{1/2}$

Donc,

$$|e^{cs}p(s)| \leq \sqrt{2}\left[\int_{-\infty}^{l}|e^{ct}p(t)|^2\mathrm{d}t+\int_{-\infty}^{l}|(e^{ct}p(t))'|^2\mathrm{d}t\right]^{1/2}. \qquad \blacksquare$$

On a l'inégalité suivante de type Sobolev :

$$\sup_{-\infty<s\leq l} |e^{cs}p(s)| \leq \sqrt{2}\left[\int_{-\infty}^{l} |e^{ct}p(t)|^2 \mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{l} |(e^{ct}p(t))'|^2 \mathrm{d}t\right]^{1/2} \tag{2.3}$$

Pour tout $l \in \mathbb{R}$ donné, on définit sur l'ensemble $e^{ct}P(\Gamma) \equiv \{e^{ct}p(t) : p \in P(\Gamma)\}$ le produit scalaire et la norme comme suit:

1. Le produit scalaire: $< x,y >_l = \displaystyle\int_{-\infty}^{l} x(t)y(t)\mathrm{d}t \, , \; x,y \in e^{ct}P(\Gamma)$
2. La norme: $\|x\|_l = \left[ < x,x >_l + < x',x' >_l \right]^{1/2} , \; x \in e^{ct}P(\Gamma)$

Clairement, le produit scalaire $< \cdot,\cdot >_l$ et la norme $\| \cdot \|_l$ sont facilement étendus à $e^{ct}H_l(\Gamma) = \{e^{ct}x(t) : x(t) \in H_l(\Gamma)\}$ en faisant ainsi un espace d'Hilbert tel que $e^{ct}H_l(\Gamma) \subset L^2(] - \infty,l],\mathrm{d}t)$ avec le produit scalaire de $x,y \in e^{ct}H_l(\Gamma)$ donné par:

$$< x,y >_{e^{ct}H_l(\Gamma)} = < x,y >_l + < x',y' >_l$$

L'inégalité (2.3) montre que:

$$\sup_{-\infty\leq t\leq l} |y(t)| \leq \sqrt{2}\|y\|_l \tag{2.4}$$

pour tout $y \in e^{ct}P(\Gamma)$ et ainsi pour tout $y \in e^{ct}H_l(\Gamma)$ aussi. Donc, toute suite $\{e^{ct}x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset e^{ct}H_l(\Gamma)$ qui est Cauchy selon la norme $\| \cdot \|_l$ converge uniformément sur $] - \infty,l]$. Car, si $y_n \underset{\|\cdot\|_l}{\longrightarrow} y$ alors: par (2.4) on a

$$\begin{aligned} \|y_n - y\|_\infty &= \sup_{-\infty\leq t\leq l} |y_n(t) - y(t)| \\ &\leq \sqrt{2}\|y_n - y\|_l \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

et donc $y_n \rightrightarrows y$ sur $]-\infty,l]$. Ainsi, tout élément de $H_l(\Gamma)$ peut être vu comme une fonction $x : ]-\infty,l] \to \mathbb{R}$ telle que $e^{ct}x$ est une fonction continue bornée de carré Lebesgue intégrable sur $]-\infty,l]$ avec dérivée faible $(e^{ct}x)' \in L^2(]-\infty,l],\mathrm{d}t)$ dans le sens de la définition suivante :

**Définition 8** *Étant donné $z \in e^{ct}H_l(\Gamma)$, on dit que la fonction $w \in L^2(]-\infty,l],\mathrm{d}t)$ est une dérivée faible pour $z$ lorsque*

$$\int_{-\infty}^{l} w(t)v(t)\mathrm{d}t = z(l)v(l) - \int_{-\infty}^{l} z(t)v'(t)\mathrm{d}t$$

*pour tout $v \in e^{ct}P(\Gamma)$.*

**Remarque 2** *Il suit aussi de l'équation* (2.4) *que les évaluations ponctuelles sont des fonctionnelles linéaires bornées sur $e^{ct}H_l(\Gamma)$ et donc toute suite faiblement convergente dans $e^{ct}H_l(\Gamma)$ converge nécessairement de façon ponctuelle.*

**Démonstration** : Soit $\Pi_{t_0}$ une fonctionnelle définie sur $e^{ct}H_l(\Gamma)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $\Pi_{t_0}(y) = y(t_0)$. Alors,

$$\begin{aligned} \|\Pi_{t_0}\|_l &= \sup_{y \in B_{e^{ct}H_l(\Gamma)}(0,1)} |\Pi_{t_0}(y)| \\ &= \sup_{y \in B_{e^{ct}H_l(\Gamma)}(0,1)} |y(t_0)| \\ &\leq \sqrt{2}\|y\|_l \leq \sqrt{2} \end{aligned}$$

Donc, $\Pi_{t_0} \in \left(e^{ct}H_l(\Gamma)\right)'$. D'où, $\Pi_{t_0}$ est une fonctionnelle linéaire bornée sur $e^{ct}H_l(\Gamma)$. Ainsi, $\Pi_{t_0}$ est continue sur $e^{ct}H_l(\Gamma)$ par rapport à la topologie faible. ■

Étant donné $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $e^{ct}f(t)|_{]-\infty,l]} \in L^2(]-\infty,l],\mathrm{d}t)$ et $A > 0$, on introduit sur $e^{ct}H_l(\Gamma)$ la fonctionnelle, à valeurs réelles, suivante :

$$\begin{aligned} F_f^l(y) &= \frac{1}{2} < y'(t),y'(t) >_l + \frac{1}{2}\, c^2 < y(t),y(t) >_l + < e^{ct}f(t),y(t) >_l \\ &\quad + A < e^{ct}\cos(e^{-ct}y(t)),e^{ct} >_l . \end{aligned}$$

On appelle cette fonctionnelle le *potentiel associé à l'équation du pendule forcé sans conservation.*

## 2.2 Existence de points critiques pour $F_f^l$

Avant d'énoncer le prochain théorème, nous allons introduire une définition qui nous permettra de tirer rapidement une des conclusions de ce théorème.

**Définition 9** *Soit $J$ une fonctionnelle réelle définie sur un domaine $\mathcal{D}$ dans un espace vectoriel $\mathcal{Y}$. La variation de Gâteaux de $J$ en $y \in \mathcal{D}$ dans la direction de $v$ ( tel que $v + y \in \mathcal{D}$ ) est donnée par $\delta J(y; v) \equiv \frac{\partial}{\partial \lambda} J(y + \lambda v)|_{\lambda=0}$. De plus, $y_0$ est un point critique de $J$ lorsque $\delta J(y_0; v) = 0$ pour tout $v$.*

**Remarque 3** *Une fonction $J$ définie sur un domaine $\mathcal{D}$ dans un espace vectoriel $\mathcal{Y}$ à valeurs réelles est dite strictement convexe sur $\mathcal{D}$ si, lorsque $y$ et $y + v \in \mathcal{D}$, $\delta J(y; v)$ est définie et $J(y + v) - J(y) > \delta J(y; v)$ lorsque $v \neq 0$. ( Voir par exemple* [13],*p:53 )*

*Note*: On représente le minimum entre deux nombres réels par le symbole $\wedge$.

**Théorème 6** *La fonctionnelle $F_f^l$ est coercive, bornée inférieurement et faiblement semi-continue inférieurement sur $e^{ct}H_l(\Gamma)$. De plus, la condition $0 < \sqrt{A} < c$ est suffisante pour que $F_f^l$ soit strictement convexe sur $e^{ct}H_l(\Gamma)$.*

**Démonstration**: On montre d'abord que la fonctionnelle $F_f^l$ est strictement convexe sur $e^{ct}H_l(\Gamma)$ lorsque $A < c^2$. Pour tout $y,v \in e^{ct}H_l(\Gamma)$ nous avons

$$\begin{aligned} F_f^l(y(t)+v(t)) - F_f^l(y(t)) &= \int_{-\infty}^{l} y'(t)v'(t)\mathrm{d}t + c^2\int_{-\infty}^{l} y(t)v(t)\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{l} e^{ct}f(t)v(t)\mathrm{d}t \\ &+ A\int_{-\infty}^{l} e^{2ct}[\cos(e^{-ct}(y(t)+v(t))) - \cos(e^{-ct}y(t))]\mathrm{d}t \\ &+ \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{l}(v'(t))^2\mathrm{d}t + \frac{1}{2}c^2\int_{-\infty}^{l} v^2(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Par la formule de Taylor de degré 1 avec reste de Lagrange, il existe une fonction $\theta$ : $]-\infty,l] \to ]0,1[$ telle que

$$\begin{aligned} \cos(e^{-ct}(y(t)+v(t))) &= \cos(e^{-ct}y(t)) - e^{-ct}v(t)\sin(e^{-ct}y(t)) \\ &- \frac{\cos(e^{-ct}(y(t)+\theta(t)v(t)))}{2}(e^{-ct}v(t))^2 \end{aligned}$$

où on évalue la fonction trigonométrique autour de $e^{-ct}y(t)$ et l'expression $(e^{-ct}(y(t)+\theta(t)v(t))$ dans le reste de Lagrange est un point intermédiaire entre $e^{-ct}y(t)$ et $e^{-ct}(y(t)+v(t))$.

Donc on obtient

$$\begin{aligned} \cos(e^{-ct}(y(t)+v(t))) - \cos(e^{-ct}y(t)) &= -e^{-ct}v(t)\sin(e^{-ct}y(t)) \\ &- \frac{(e^{-ct}v(t))^2}{2}\cos(e^{-ct}(y(t)+\theta(t)v(t))). \end{aligned}$$

Nous allons maintenant calculer la variation de Gâteaux de $F_f^l$ en $y$ dans la direction de $v$ :

$$\delta F_f^l(y;v) \equiv \frac{\partial}{\partial\lambda}F_f^l(y+\lambda v)\big|_{\lambda=0}.$$

Pour ce faire, séparons notre fonctionnelle $F_f^l(y)$ comme suit : $F_f^l(y) = F_f^l(y)_1 + F_f^l(y)_2 + F_f^l(y)_3 + F_f^l(y)_4$ où

$$
\begin{aligned}
F_f^l(y)_1 &= \frac{1}{2} < y'(t),y'(t) >_l \\
F_f^l(y)_2 &= \frac{1}{2} c^2 < y(t),y(t) >_l \\
F_f^l(y)_3 &= < e^{ct} f(t),y(t) >_l \\
F_f^l(y)_4 &= A < e^{ct}\cos(e^{-ct}y(t)),e^{ct} >_l \ .
\end{aligned}
$$

Nous effectuons le calcul de $\delta F_f^l(y;v)_i$ $(i = 1,2,3,4)$ séparément comme suit :

$$
\begin{aligned}
\delta F_f^l(y;v)_1 &= \frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{1}{2} < (y+\lambda v)'(t),(y+\lambda v)'(t) >_l |_{\lambda=0} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\int_{-\infty}^{l}(y+\lambda v)'(t)(y+\lambda v)'(t)\mathrm{d}t\right)\bigg|_{\lambda=0} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\int_{-\infty}^{l}\left[y'(t)+\lambda v'(t)\right]\left[y'(t)+\lambda v'(t)\right]\mathrm{d}t\right)\bigg|_{\lambda=0} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\int_{-\infty}^{l}\left[(y'(t))^2+2\lambda y'(t)v'(t)+\lambda^2(v'(t))^2\right]\mathrm{d}t\right)\bigg|_{\lambda=0} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\int_{-\infty}^{l}(y'(t))^2\mathrm{d}t\right)\bigg|_{\lambda=0}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(2\lambda\int_{-\infty}^{l}y'(t)v'(t)\mathrm{d}t\right)\bigg|_{\lambda=0} \\
&\quad +\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\lambda}\lambda^2\int_{-\infty}^{l}(v'(t))^2\mathrm{d}t\bigg)\bigg|_{\lambda=0} \\
&= 0+\frac{1}{2}2\int_{-\infty}^{l}y'(t)v'(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}2\lambda\int_{-\infty}^{l}(v'(t))^2\mathrm{d}t\bigg|_{\lambda=0} \\
&= \int_{-\infty}^{l}y'(t)v'(t)\mathrm{d}t \\
&= < y'(t),v'(t) >_l
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta F_f^l(y;v)_2 &= \frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{1}{2}c^2 < (y+\lambda v)(t),(y+\lambda v)(t) >_l |_{\lambda=0} \\
&= \frac{c^2}{2}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\int_{-\infty}^{l}(y+\lambda v)(t)(y+\lambda v)(t)\mathrm{d}t\right)\Big|_{\lambda=0} \\
&= \frac{c^2}{2}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\int_{-\infty}^{l}[y^2(t)+2\lambda y(t)v(t)+\lambda^2 v^2(t)]\mathrm{d}t\right)\Big|_{\lambda=0} \\
&= \frac{c^2}{2}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\int_{-\infty}^{l}y^2(t)\mathrm{d}t\right)\Big|_{\lambda=0}+\frac{c^2}{2}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(2\lambda\int_{-\infty}^{l}y(t)v(t)\mathrm{d}t\right)\Big|_{\lambda=0} \\
&\quad +\frac{c^2}{2}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\lambda^2\int_{-\infty}^{l}v^2(t)\mathrm{d}t\right)\Big|_{\lambda=0} \\
&= 0+\frac{c^2}{2}2\int_{-\infty}^{l}y(t)v(t)\mathrm{d}t+\frac{c^2}{2}2\lambda\int_{-\infty}^{l}v^2(t)\mathrm{d}t\Big|_{\lambda=0} \\
&= c^2\int_{-\infty}^{l}y(t)v(t)\mathrm{d}t \\
&= c^2 < y(t),v(t) >_l
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta F_f^l(y;v)_3 &= \frac{\partial}{\partial\lambda} < e^{ct}f(t),y(t)+\lambda v(t) >_l |_{\lambda=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\int_{-\infty}^{l}e^{ct}f(t)[y(t)+\lambda v(t)]\mathrm{d}t\right)\Big|_{\lambda=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\int_{-\infty}^{l}e^{ct}f(t)y(t)\mathrm{d}t\right)\Big|_{\lambda=0}+\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\lambda\int_{-\infty}^{l}e^{ct}f(t)v(t)\mathrm{d}t\right)\Big|_{\lambda=0} \\
&= 0+\int_{-\infty}^{l}e^{ct}f(t)v(t)\mathrm{d}t \\
&= < e^{ct}f(t),v(t) >_l
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta F_f^l(y;v)_4 &= \frac{\partial}{\partial\lambda} A < e^{ct}\cos(e^{-ct}(y(t)+\lambda v(t))), e^{ct} >_l |_{\lambda=0} \\
&= A\frac{\partial}{\partial\lambda}\Big(\int_{-\infty}^{l} e^{2ct}\cos(e^{-ct}(y(t)+\lambda v(t)))\mathrm{d}t\Big)\Big|_{\lambda=0} \\
&= A\lim_{\Delta\lambda\to 0}\left[\frac{\int_{-\infty}^{l} e^{2ct}\cos(e^{-ct}(y(t)+\Delta\lambda v(t)))\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{l} e^{2ct}\cos(e^{-ct}y(t))\mathrm{d}t}{\Delta\lambda}\right] \\
&= A\lim_{\Delta\lambda\to 0}\Big(\int_{-\infty}^{l} e^{2ct}\Big[\frac{\cos(e^{-ct}(y(t)+\Delta\lambda v(t))) - \cos(e^{-ct}y(t))}{\Delta\lambda}\Big]\mathrm{d}t\Big).
\end{aligned}
$$

Faisons un petit calcul, le développement de Taylor de $\dfrac{\cos(e^{-ct}y+e^{-ct}\Delta\lambda v)}{\Delta\lambda}$, où $\gamma$ est entre $e^{-ct}y$ et $e^{-ct}\Delta\lambda v$ :

$$
\begin{aligned}
\frac{\cos(e^{-ct}y+e^{-ct}\Delta\lambda v)}{\Delta\lambda} &= \cos(e^{-ct}) - \frac{\sin(e^{-ct})}{1!}[e^{-ct}\Delta\lambda v] - \frac{\cos(\gamma)}{2!}(e^{-ct}\Delta\lambda v)^2 \\
\frac{\cos(e^{-ct}y+e^{-ct}\Delta\lambda v) - \cos(e^{-ct})}{\Delta\lambda} &= -e^{-ct}v\sin(e^{-ct}y) - \frac{\cos(\gamma)}{2!}e^{-2ct}\Delta\lambda v^2.
\end{aligned}
$$

Comme $\left[\dfrac{\cos(e^{-ct}(y(t)+\Delta\lambda v(t))) - \cos(e^{-ct}y(t))}{\Delta\lambda}\right]$ est bien borné pour tout $\Delta\lambda$ , on utilise le théorème de la convergence dominée de Lebesgue pour entrer la limite à l'intérieur de l'intégrale. Ainsi, on obtient

$$
\begin{aligned}
\delta F_f^l(y;v)_4 &= A\int_{-\infty}^{l} e^{2ct}\lim_{\Delta\lambda\to 0}\left[\frac{\cos(e^{-ct}(y(t)+\Delta\lambda v(t)))-\cos(e^{-ct}y(t))}{\Delta\lambda}\right]\mathrm{d}t\\
&= A\int_{-\infty}^{l} e^{2ct}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\cos(e^{-ct}(y(t)+\lambda v(t)))\right]\Big|_{\lambda=0}\mathrm{d}t\\
&= -A\int_{-\infty}^{l} e^{2ct}\left[e^{-ct}v(t)\sin(e^{-ct}(y(t)+\lambda v(t)))\big|_{\lambda=0}\right]\mathrm{d}t\\
&= -A\int_{-\infty}^{l} e^{ct}v(t)\sin(e^{-ct}y(t))\mathrm{d}t\\
&= -A < e^{ct}\sin(e^{-ct}y(t)),v(t) >_l .
\end{aligned}
$$

Donc, la variation de Gâteaux de $F_f^l$ en $y$ dans la direction de $v$ est la suivante:

$$
\begin{aligned}
\delta F_f^l(y;v) &= < y'(t),v'(t) >_l + c^2 < y(t),v(t) >_l + < e^{ct}f(t),v(t) >_l\\
&\quad - A < e^{ct}\sin(e^{-ct}y(t)),v(t) >_l .
\end{aligned}
$$

Effectuons maintenant le calcul suivant:

$$
\begin{aligned}
F_f^l(y(t) \quad + \quad & v(t)) - F_f^l(y(t)) \\
= \quad & \int_{-\infty}^{l} y'(t)v'(t)\mathrm{d}t + c^2 \int_{-\infty}^{l} y(t)v(t)\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{l} e^{ct} f(t)v(t)\mathrm{d}t \\
& + A \int_{-\infty}^{l} e^{2ct} \big[\cos(e^{-ct}(y(t)+v(t))) - \cos(e^{-ct}y(t))\big]\mathrm{d}t \\
& + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{l} (v'(t))^2\mathrm{d}t + \frac{c^2}{2}\int_{-\infty}^{l} v^2(t)\mathrm{d}t \\
= \quad & \int_{-\infty}^{l} y'(t)v'(t)\mathrm{d}t + c^2 \int_{-\infty}^{l} y(t)v(t)\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{l} e^{ct} f(t)v(t)\mathrm{d}t \\
& - A \int_{-\infty}^{l} e^{ct} v(t)\sin(e^{-ct}y(t)) + \frac{1}{2}v^2(t)\cos(e^{-ct}(y(t)+\theta(t)v(t)))\mathrm{d}t \\
& + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{l} (v'(t))^2\mathrm{d}t + \frac{c^2}{2}\int_{-\infty}^{l} v^2(t)\mathrm{d}t \\
= \quad & \int_{-\infty}^{l} y'(t)v'(t)\mathrm{d}t + c^2 \int_{-\infty}^{l} y(t)v(t)\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{l} e^{ct} f(t)v(t)\mathrm{d}t \\
& - A \int_{-\infty}^{l} e^{ct} v(t)\sin(e^{-ct}y(t))\mathrm{d}t \\
& - \frac{A}{2}\int_{-\infty}^{l} v^2(t)\cos(e^{-ct}(y(t)+\theta(t)v(t)))\mathrm{d}t \\
& + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{l} (v'(t))^2\mathrm{d}t + \frac{c^2}{2}\int_{-\infty}^{l} v^2(t)\mathrm{d}t \\
= \quad & \delta F_f^l(y;v) - \frac{A}{2}\int_{-\infty}^{l} v^2(t)\cos(e^{-ct}(y(t)+\theta(t)v(t)))\mathrm{d}t \\
& + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{l} (v'(t))^2\mathrm{d}t + \frac{c^2}{2}\int_{-\infty}^{l} v^2(t)\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Or, si $A < c^2$, alors il est clair que $v^2(t)\big[1 - \frac{A}{c^2}\cos(e^{-ct}(y(t)+\theta(t)v(t)))\big] > 0$ .
Donc,

$$
-\frac{A}{2}\int_{-\infty}^{l} v^2(t)\cos(e^{-ct}(y(t)+\theta(t)v(t)))\mathrm{d}t + \frac{c^2}{2}\int_{-\infty}^{l} v^2(t)\mathrm{d}t > 0
$$

et comme $\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{l}(v'(t))^2 \mathrm{d}t \geq 0$ , on conclut que $F_f^l(y+v) - F_f^l(y) > \delta F_f^l(y;v)$.

Ceci montre que la fonctionnelle $F_f^l$ est strictement convexe sur $e^{ct}H_l(\Gamma)$ lorsque $A < c^2$. Il est facile de montrer que les fonctions $F_f^l(y)_1$ et $F_f^l(y)_2$ sont convexes et continues sur $(e^{ct}H_l(\Gamma), \|\cdot\|_l)$ et donc, par le théorème de Mazur, sont faiblement semi-continues inférieurement.

Clairement, $F_f^l(y)_3 = \int_{-\infty}^{l} e^{ct}f(t)y(t)\mathrm{d}t =< e^{ct}f(t), y(t) >_l$ est une fonctionnelle linéaire bornée sur $e^{ct}H_l(\Gamma)$ et donc faiblement semi-continue inférieurement ( car bornée, linéaire implique convexe ). La fonctionnelle $F_f^l(y)_4 = \int_{-\infty}^{l} e^{2ct}\cos(e^{-ct}y(t))\mathrm{d}t =$ $< e^{ct}\cos(e^{-ct}y(t)), e^{ct} >_l$ est aussi faiblement continue sur $e^{ct}H_l(\Gamma)$. Pour le voir, soit une suite $\{y_n\} \subset e^{ct}H_l(\Gamma)$ qui converge faiblement vers $y_0 \in e^{ct}H_l(\Gamma)$. Par l'inégalité (2.4), il suit que toute évaluation en un point est une fonctionnelle linéaire bornée sur $e^{ct}H_l(\Gamma)$ selon la norme $\|\cdot\|_l$ et donc que $y_n(t)$ converge ponctuellement vers $y_0(t)$ ( voir Remarque 2 ). Donc, $\cos(e^{-ct}y_n(t))$ converge ponctuellement vers $\cos(e^{-ct}y_0(t))$ sur $]-\infty, l]$. Par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on a donc que $\rho(y_n) \to \rho(y_0)$. Donc, $F_f^l = F_f^l(y)_1 + F_f^l(y)_2 + F_f^l(y)_3 + F_f^l(y)_4$ est faiblement semi-continue inférieurement sur $e^{ct}H_l(\Gamma)$. De plus, pour tout $y \in H_l(\Gamma)$ on a

$$\begin{aligned} F_f^l(y) &\geq \frac{1}{2}(1\wedge c^2)\|y\|_l^2 - < e^{ct}f(t), e^{ct}f(t) >_l^{1/2} < y, y >_l^{1/2} - A\int_{-\infty}^{l} e^{2ct}\mathrm{d}t \\ &\geq \frac{1}{2}(1\wedge c^2)\|y\|_l^2 - < e^{ct}f(t), e^{ct}f(t) >_l^{1/2} \|y\|_l - A\frac{e^{2cl}}{2c} \end{aligned}$$

car, en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$
\begin{aligned}
|<e^{ct}f(t),y(t)>_l| &\leq \left(\int_{-\infty}^{l}|e^{ct}f(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{l}|y(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2} \qquad (2.5)\\
&= <e^{ct}f(t),e^{ct}f(t)>_l^{1/2}<y(t),y(t)>_l^{1/2}.
\end{aligned}
$$

D'où $F_f^l$ est coercive et bornée inférieurement sur $e^{ct}H_l(\Gamma)$. ■

Étant donné $k \in \mathbb{R}$, il suit du Théorème 6 que $F_f^l$ atteint nécessairement son minimum sur le sous-espace affine fermé $\{y+e^{ct}k : y \in e^{ct}\widetilde{H}_l(\Gamma)\} \subset e^{ct}H_l(\Gamma)$. De plus, par convexité stricte, ce minimum est unique lorsque $A < c^2$ et est précisément le point critique de $F_f^l$ sur $e^{ct}\widetilde{H}_l(\Gamma) + e^{ct}k$ donné par la fonction $y \in e^{ct}\widetilde{H}_l(\Gamma)$ pour laquelle $\delta F_f^l(y + e^{ct}k; v) = 0$ pour tout $v \in e^{ct}\widetilde{H}_l(\Gamma)$.

Le résultat suivant démontre que le point critique varie continûment avec $f$.

**Théorème 7** *Soient $A,c,k,l \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \sqrt{A} < c$. Si $y = y_k$ est le point critique de $F_f^l(y + e^{ct}k)$ dans $e^{ct}\widetilde{H}_l(\Gamma)$ et $y = y_k + \Delta y$ est le point critique de $F_{f+\Delta f}^l(y + e^{ct}k)$ où $f$, $\Delta f \in L^2(]-\infty,l],e^{ct}\mathrm{d}t)$, alors :*

$$
|\Delta y(s)| \leq \sqrt{2}\|\Delta y\|_l \leq \frac{\sqrt{2} < e^{ct}\Delta f,e^{ct}\Delta f >_l^{1/2}}{1 \wedge (c^2 - A)}
$$

*pour tout $s \in ]-\infty,l]$.*

**Démonstration** : Soit $z = \Delta y$ l'unique point où la fonctionnelle $\Psi(z) = F_{f+\Delta f}^l(z + y_k + e^{ct}k)$ atteint son minimum dans $e^{ct}\widetilde{H}_l(\Gamma)$. Si on pose $\psi(\lambda) = \Psi(\lambda\Delta y)$, alors nous avons la dérivée

$$
\begin{aligned}
\dot{\psi}(\lambda) &= \ < (\lambda\Delta y + y_k + e^{ct}k)', (\Delta y)' >_l + c^2 < \lambda\Delta y + y_k + e^{ct}k, \Delta y >_l \\
&\quad + < e^{ct}(f + \Delta f), \Delta y >_l - A < e^{ct}\sin(e^{-ct}(\lambda\Delta y + y_k + e^{ct}k)), \Delta y >_l \ .
\end{aligned}
$$

Puisque $y = y_k$ est le point critique de $F_f^l(y+e^{ct}k)$ dans $e^{ct}\widetilde{H}_l(\Gamma)$, on a $\delta F_f^l(y_k+e^{ct}k; v) = 0$ pour tout $v \in e^{ct}\widetilde{H}_l(\Gamma)$ et ainsi, pour $v = \Delta y$, on a

$$
\begin{aligned}
& < (y_k + e^{ct}k)', (\Delta y)' >_l + c^2 < y_k + e^{ct}k, \Delta y >_l + < e^{ct}f, \Delta y >_l \\
& - A < e^{ct}\sin(e^{-ct}(y_k + e^{ct}k)), \Delta y >_l = 0.
\end{aligned} \tag{2.6}
$$

Donc, on a

$$
\begin{aligned}
\dot{\psi}(1) &= \ < (\Delta y + y_k + e^{ct}k)', (\Delta y)' >_l + c^2 < \Delta y + y_k + e^{ct}k, \Delta y >_l \\
&\quad + < e^{ct}(f + \Delta f), \Delta y >_l - A < e^{ct}\sin(e^{-ct}(\Delta y + y_k + e^{ct}k)), \Delta y >_l \\
&= \ < (\Delta y)', (\Delta y)' >_l + < (y_k + e^{ct}k)', (\Delta y)' >_l + c^2 < \Delta y, \Delta y >_l \\
&\quad + c^2 < y_k + e^{ct}k, \Delta y >_l + < e^{ct}f, \Delta y >_l + < e^{ct}\Delta f, \Delta y >_l \\
&\quad - A < e^{ct}\sin(e^{-ct}(\Delta y + y_k + e^{ct}k)), \Delta y >_l \\
&= \ < (\Delta y)', (\Delta y)' >_l + c^2 < \Delta y, \Delta y >_l + < e^{ct}\Delta f, \Delta y >_l \quad \text{(d'après 2.6)} \\
&\quad - A < e^{ct}\sin(e^{-ct}(\Delta y + y_k + e^{ct}k)), \Delta y >_l \\
&\quad + A < e^{ct}\sin(e^{-ct}(y_k + e^{ct}k)), \Delta y >_l \\
&= \ < (\Delta y)', (\Delta y)' >_l + c^2 < \Delta y, \Delta y >_l + < e^{ct}\Delta f, \Delta y >_l \\
&\quad - A < e^{ct}[\sin(e^{-ct}(\Delta y + y_k + e^{ct}k)) - \sin(e^{-ct}(y_k + e^{ct}k))], \Delta y >_l \ .
\end{aligned}
$$

L'inégalité

$$|\sin(e^{-ct}(\Delta y + y_k + e^{ct}k)) - \sin(e^{-ct}(y_k + e^{ct}k))| \leq |e^{-ct}\Delta y|$$

nous donne

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}(1) &\geq \ <(\Delta y)',(\Delta y)'>_l + c^2 <\Delta y,\Delta y>_l + <e^{ct}\Delta f,\Delta y>_l \\
&\quad - A <e^{ct}|e^{-ct}\Delta y|,|\Delta y|>_l \\
&\geq \ <(\Delta y)',(\Delta y)'>_l + (c^2 - A) <\Delta y,\Delta y>_l + <e^{ct}\Delta f,\Delta y>_l \\
&\geq (1 \wedge (c^2 - A))\|\Delta y\|_l^2 - |<e^{ct}\Delta f,\Delta y>_l| \\
&\geq (1 \wedge (c^2 - A))\|\Delta y\|_l^2 - |<e^{ct}\Delta f,e^{ct}\Delta f>_l|^{1/2} <\Delta y,\Delta y>_l^{1/2} \quad \text{(d'après (2.5))} \\
&\geq (1 \wedge (c^2 - A))\|\Delta y\|_l^2 - |<e^{ct}\Delta f,e^{ct}\Delta f>_l|^{1/2}\|\Delta y\|_l \\
&\geq \|\Delta y\|_l\big[(1 \wedge (c^2 - A))\|\Delta y\|_l - |<e^{ct}\Delta f,e^{ct}\Delta f>_l|^{1/2}\big].
\end{aligned}$$

Ainsi, $\dot{\psi}(1) > 0$ ( et donc $\Delta y$ n'est pas un minimum pour $\Psi$ ) lorsque $\|\Delta y\|_l > \frac{<e^{ct}\Delta f,e^{ct}\Delta f>_l^{1/2}}{1 \wedge (c^2 - A)}$. Donc, on doit avoir $\|\Delta y\|_l \leq \frac{<e^{ct}\Delta f,e^{ct}\Delta f>_l^{1/2}}{1 \wedge (c^2 - A)}$. En multipliant par $\sqrt{2}$ des deux côtés de l'inégalité, on obtient $\sqrt{2}\|\Delta y\|_l \leq \sqrt{2}\frac{<e^{ct}\Delta f,e^{ct}\Delta f>_l^{1/2}}{1 \wedge (c^2 - A)}$. L'inégalité (2.4) nous permet de conclure que

$$|\Delta y(s)| \leq \sqrt{2}\|\Delta y\|_l \leq \frac{\sqrt{2} <e^{ct}\Delta f,e^{ct}\Delta f>_l^{1/2}}{1 \wedge (c^2 - A)}$$

pour tout $s \in ]-\infty,l]$. ∎

# CHAPITRE 3

# Existence et unicité des solutions de l'équation du pendule

Pour tout $y \in e^{ct}H_l(\Gamma)$ avec dérivée faible $y' \in L^2(]-\infty,l],\mathrm{d}t)$, on écrit $y''$ pour désigner, lorsqu'il existe, l'élément de $L^2(]-\infty,l],\mathrm{d}t)$ qui est la dérivée faible de $y'$ dans le sens où

$$\int_{-\infty}^{l} y''(t)v(t)\mathrm{d}t = y'(l)v(l) - \int_{-\infty}^{l} y'(t)v'(t)\mathrm{d}t$$

pour tout $v \in e^{ct}P(\Gamma)$. Dans ce cas, la variation de Gâteaux de $F_f^l$ en un tel point $y \in e^{ct}H_l(\Gamma)$ dans la direction $v$ avec $v(l) = 0$ devient alors

$$\begin{aligned}
\delta F_f^l(y;v) &= \int_{-\infty}^{l} y'(t)v'(t)\mathrm{d}t + c^2\int_{-\infty}^{l} y(t)v(t)\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{l} e^{ct}f(t)v(t)\mathrm{d}t \\
&\quad - A\int_{-\infty}^{l} e^{ct}v(t)\sin(e^{-ct}y(t))\mathrm{d}t \\
&= -\int_{-\infty}^{l} y''(t)v(t)\mathrm{d}t + c^2\int_{-\infty}^{l} y(t)v(t)\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{l} e^{ct}f(t)v(t)\mathrm{d}t \\
&\quad - A\int_{-\infty}^{l} e^{ct}\sin(e^{-ct}y(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{l} \big[-y''(t) + c^2y(t) + e^{ct}f(t) - Ae^{ct}\sin(e^{-ct}y(t))\big]v(t)\mathrm{d}t\,.
\end{aligned}$$

Ainsi, la fonctionnelle $F_f^l$ est le potentiel associé à l'équation différentielle

$$y''(t) - c^2y(t) + Ae^{ct}\sin(e^{-ct}y(t)) = e^{ct}f(t) \tag{3.1}$$

qui sous la transformation $y(t) = e^{ct}x(t)$ devient l'équation du pendule forcé sans conservation.

**Lemme 4** *Pour* $y,v \in^{ct} H_l(\Gamma)$, *on a*

$$\delta F_f^l(y;v) =< y'(t) - \int_{-\infty}^{t} c^2y(s) + e^{cs}f(s) - Ae^{cs}\sin(e^{-cs}y(s))\mathrm{d}s, v'(t) >_l$$

*lorsque* $v(l) = 0$.

**Démonstration**: Posons $\psi(t)$ pour désigner la primitive de l'équation $-y''(t) + c^2y(t) + e^{ct}f(t) - Ae^{ct}\sin(e^{-ct}y(t))$. Alors,

$$\begin{aligned}
\psi(t) &= \int_{-\infty}^{t} \big[-y''(s) + c^2y(s) + e^{cs}f(s) - A\sin(e^{-cs}y(s))\big]\mathrm{d}s \\
&= -y'(t) + \int_{-\infty}^{t} \big[c^2y(s) + e^{cs}f(s) - Ae^{cs}\sin(e^{-cs}y(s))\big]\mathrm{d}s\,.
\end{aligned}$$

Puisque $\int_{-\infty}^{l} \psi'(t)v(t)\mathrm{d}t = -\int_{-\infty}^{l} \psi(t)v'(t)\mathrm{d}t$ lorsque $v(l) = 0$ , on a:

$$\begin{aligned}
\delta F_f^l(y;v) &= -\int_{-\infty}^{l}\Big(-y'(t)+\int_{-\infty}^{t} c^2y(s)+e^{cs}f(s)-Ae^{cs}\sin(e^{-cs}y(s))\mathrm{d}s\Big)v'(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{l}\Big(y'(t)+\int_{-\infty}^{t} -c^2y(s)-e^{cs}f(s)+Ae^{cs}\sin(e^{-cs}y(s))\mathrm{d}s\Big)v'(t)\mathrm{d}t \\
&= < y'(t)-\int_{-\infty}^{t} c^2y(s)+e^{cs}f(s)-Ae^{cs}\sin(e^{-cs}y(s))\mathrm{d}s, v'(t) >_l . \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

## 3.1 Fermeture dans $L^2$ et définitions des projections

On dénote par $e^{ct}B$ la fermeture de $e^{ct}\widetilde{P}(\Gamma)$ dans $L^2(]-\infty,l],\mathrm{d}t)$. Clairement, $e^{ct}\widetilde{H}_l(\Gamma)$ est dense dans $e^{ct}B$ puisque $e^{ct}\widetilde{P}(\Gamma)$ est dense dans chacun et $e^{ct}\widetilde{H}_l(\Gamma) \subseteq e^{ct}B$. De plus, nous avons $e^{ct}C(\Gamma) \subset e^{ct}B + e^{ct}\mathbb{R}$ ,car si $\{e^{ct}x_n\} \subset e^{ct}C(\,]-\infty,l]\,)$ telle que $x_n \rightrightarrows x$ sur $]-\infty,l]$ lorsque $x_n\,, x \in C(\Gamma)$, alors on obtient

$$\left(\int_{-\infty}^{l} |e^{ct}x_n - e^{ct}x|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2} = \left(\int_{-\infty}^{l} e^{2ct}|x_n - x|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 .$$

Donc, $e^{ct}x_n \to e^{ct}x$ dans $L^2$ et ainsi, $e^{ct}x \in e^{ct}B$.

Soient $\Pi_{e^{ct}B}$ la projection de $e^{ct}B + e^{ct}\mathbb{R}$ sur $e^{ct}B$, $\Pi_{(e^{ct}B)^\perp}$ la projection de $e^{ct}B + e^{ct}\mathbb{R}$ sur le complément orthogonal de $e^{ct}B$ dans $e^{ct}B + e^{ct}\mathbb{R}$ que l'on note $(e^{ct}B)^\perp$ et $\Pi_{e^{ct}\mathbb{R}}$ la projection de $e^{ct}B + e^{ct}\mathbb{R}$ sur $e^{ct}\mathbb{R}$.

Étant donné $x \in B + \mathbb{R}$ ( $\equiv e^{-ct}(e^{ct}B + e^{ct}\mathbb{R})$ ), alors $\overline{x}$ est l'élément de $\mathbb{R}$ pour lequel $\Pi_{e^{ct}\mathbb{R}}(e^{ct}x) = e^{ct}\overline{x}$ et $\tilde{x}$ est l'élément de $B$ ( $\equiv e^{-ct}(e^{ct}B)$ ) donné par $\tilde{x} = x - \overline{x}$. Nous avons donc $(-y''(t) + c^2y(t)) \in e^{ct}B$, car si $y(t) = e^{ct}x(t)$ alors

$$
\begin{aligned}
-y''(t)+c^2y(t) &= -(e^{ct}x(t))''+c^2e^{ct}x(t)\\
&= -\left[e^{ct}x''(t)+2ce^{ct}x'(t)+c^2e^{ct}x(t)\right]+c^2e^{ct}x(t)\\
&= -e^{ct}x''(t)-2ce^{ct}x'(t) \text{ où } \overline{x'}=\overline{x''}=0\ .
\end{aligned}
$$

Aussi, $Ae^{ct}\sin(e^{-ct}y(t)) \in e^{ct}H_l(\Gamma) \subset (e^{ct}B+e^{ct}\mathbb{R})$ pour tout $y \in e^{ct}H_l(\Gamma)$, car si $y(t) = e^{ct}x(t)$ alors

$$
\begin{aligned}
Ae^{ct}\sin(e^{-ct}y(t)) &= Ae^{ct}\sin(e^{-ct}e^{ct}x(t))\\
&= Ae^{ct}\sin x(t)\ .
\end{aligned}
$$

Comme le sinus d'une fonction $T$-périodique est $T$-périodique, on obtient $e^{ct}\sin(e^{-ct}y(t)) \in e^{ct}H_l(\Gamma)$ pour tout $y \in e^{ct}H_l(\Gamma)$.

Nous allons maintenant énoncer une proposition qui nous donnera l'existence de $y_k'' \in L^2(]-\infty,l],\mathrm{d}t)$. C'est-à-dire que nous aurons au moins l'existence d'un $y'' \in L^2(]-\infty,l],\mathrm{d}t)$ dans le cas où $y$ est le point critique de notre fonctionnelle.

**Proposition 5** *Soit* $z \in e^{ct}\widetilde{H}_l(\Gamma)$. *Si* $\displaystyle\int_{-\infty}^{l} z(t)v'(t)\mathrm{d}t = 0$ *pour toute fonction* $v \in e^{ct}\widetilde{H}_l(\Gamma)$ *telle que* $v(l) = 0$, *alors* $z = 0$.

**Démonstration :** Soit $z \in e^{ct}\widetilde{H}_l(\Gamma)$ . On peut alors écrire $z = e^{ct}x(t)$ où $x(t)$ est une fonction de la forme $x(t) = \displaystyle\sum_{\lambda\in\Gamma\setminus\{0\}} \hat{x}(\lambda)e^{i\lambda t}$. Comme $x(t)$ est continue et de moyenne nulle, dans tout segment semi-ouvert de longueur $T$, il existe au moins un segment où $x \geq 0$ et où la valeur de $x$ est arbitrairement petite. De la même façon, il existe au moins un segment où $x \leq 0$ et où la valeur de $x$ est arbitrairement petite. De plus, on peut choisir une fonction $u \in e^{ct}\widetilde{H}_l$ à support sur ces segments, telle que $\int_{-\infty}^{l} [z(t)+u(t)]\mathrm{d}t = 0$ et $\int_{-\infty}^{l} z(t)u(t)\mathrm{d}t$ est arbitrairement petit. Si on pose $v(t) = \int_{-\infty}^{t} [z(s)+u(s)]\mathrm{d}s$, alors $v$ est un élément de $e^{ct}\widetilde{H}(\Gamma)$ tel que $v(l) = 0$. Ainsi, si $\int_{-\infty}^{l} z(t)v'(t)\mathrm{d}t = 0$, c'est-à-dire que $\int_{-\infty}^{l} z(t)[z(t)+u(t)]\mathrm{d}t = 0$, on a $\int_{-\infty}^{l} z^2(t)\mathrm{d}t = -\int_{-\infty}^{l} z(t)u(t)\mathrm{d}t$ qui est arbitrairement petit. Ainsi, $\int_{-\infty}^{l} z^2(t)\mathrm{d}t = 0$, c'est-à-dire $z(t) = 0$. ■

Il est évident que, dans la Proposition 5, il suffit de prendre seulement les $v$ tels que $\int_{-\infty}^{l} |v'(t)|^2\mathrm{d}t \leq M$ pour une constante donnée $M > 0$. Or, toute fonction $z(t) \in e^{ct}B$ peut être approchée dans $L^2(]-\infty,l],\mathrm{d}t)$ par un élément de $e^{ct}\widetilde{H}_l(\Gamma)$. D'où la Proposition 5 est vérifiée lorsque $z(t)$ est élément de $e^{ct}B$.

Étant donné $k \in \mathbb{R}$, soit $\Phi_k : e^{ct}\widetilde{H}_l(\Gamma) \to \mathbb{R}$ définie par $\Phi_k(y) = F_f^l(y+e^{ct}k)$. Par le même calcul effectué dans le Lemme 4, la variation de Gâteaux de $\Phi_k$ en $y \in e^{ct}\widetilde{H}_l(\Gamma)$ dans la direction de $v \in e^{ct}\widetilde{H}_l(\Gamma)$ avec $v(l) = 0$ est donnée par

$$\begin{aligned} \delta\Phi_k(y;v) &= < -(y(t)+e^{ct}k)'' + c^2(y(t)+e^{ct}k) + e^{ct}f(t) \\ &\quad - Ae^{ct}\sin(e^{-ct}y(t)+k), v(t) >_l \\ &= < (y(t)+e^{ct}k)' - \int_{-\infty}^{t} \big[c^2(y(s)+e^{cs}k) + e^{cs}f(s) \\ &\quad - Ae^{cs}\sin(e^{-cs}y(s)+k)\big]\mathrm{d}s, v'(t) >_l \ . \end{aligned}$$

Si $y_k \in e^{ct}\widetilde{H}_l(\Gamma)$ produit un minimum pour $\Phi_k$, alors on a l'équation d'Euler $\delta\Phi_k(y_k;v) = 0$ pour tout $v \in e^{ct}\widetilde{H}_l(\Gamma)$ avec $v(l) = 0$. D'où, d'après la Proposition 5 et la discussion qui s'en suit, on a que $y_k$ est une solution, dans le sous-espace $e^{ct}\widetilde{H}(\Gamma)$ de $L^2(]-\infty,l],\mathrm{d}t)$, ( et unique lorsque $A < c^2$ ) des équations

$$(y(t)+e^{ct}k)'' - c^2(y(t)+e^{ct}k) - \Pi_{e^{ct}B}\big[e^{ct}f(t) - Ae^{ct}\sin(e^{-ct}y(t)+k)\big] = 0$$

et

$$\begin{aligned}(y(t)+e^{ct}k)' \quad - \quad \int_{-\infty}^{t} \Big[ & c^2(y(s)+e^{cs}k) + \Pi_{e^{ct}B}\big[e^{cs}\tilde{f}(s) \\ & - Ae^{cs}\widetilde{\sin}(e^{-cs}y(s)+k)\big]\Big]\mathrm{d}s = 0\,.\end{aligned}$$

avec $y_k'' \in L^2(]-\infty,l],\mathrm{d}t)$.

## 3.2 Analyse des projections

À présent, nous devons utiliser les projections parce que, pour que le produit scalaire de $e^{ct}f(t) - Ae^{ct}\sin(e^{-ct}y(t)+k)$ avec $v(t)$ soit égal zéro, on voudrait bien que $e^{ct}f(t) - Ae^{ct}$ $\sin(e^{-ct}y(t)+k) = 0$. Cependant, comme $v$ est dans $e^{ct}\widetilde{H}_l(\Gamma)$ on sait que la projection de $e^{ct}f(t) - Ae^{ct}\sin(e^{-ct}y(t)+k)$ sur $e^{ct}B$ est égale à zéro, mais on ne peut rien dire pour le projection de $e^{ct}f(t) - Ae^{ct}\sin(e^{-ct}y(t)+k)$ sur $(e^{ct}B)^{\perp}$; c'est pourquoi on utilise le complément orthogonal. Si la projection de $e^{ct}f(t) - Ae^{ct}\sin(e^{-ct}y(t)+k)$ sur $(e^{ct}B)^{\perp}$ est égale à zéro, alors on pourra conclure que $e^{ct}f(t) - Ae^{ct}\sin(e^{-ct}y(t)+k)$ vaut effectivement zéro ( pour un certain $y = y_{k_0}$ ) . Donc, si nous montrons qu'il existe $k_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\Pi_{(e^{ct}B)^{\perp}}\, e^{ct}f(t) - Ae^{ct}\sin(e^{-ct}y_{k_0}(t)+k_0) = 0$$

alors nous aurons l'existence d'une fonction $y_{k_0} \in e^{ct}\widetilde{H}_l(\Gamma)$ ( qui est unique lorsque $A < c^2$ ) telle que

$$(y_{k_0}(t) + e^{ct}k_0)'' - c^2(y_{k_0} + e^{ct}k_0) - e^{ct}f(t) + Ae^{ct}\sin(e^{-ct}y_{k_0}(t) + k_0) = 0 \tag{3.2}$$

et

$$\begin{aligned}(y_{k_0}(t) + e^{ct}k_0)' \quad - \quad \int_{-\infty}^{l} & \big[c^2(y_{k_0}(s) + e^{cs}k_0) + e^{cs}f(s) \\ & - Ae^{cs}\sin(e^{-cs}y_{k_0}(s) + k_0)\big]\mathrm{d}s = 0\,. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Puisque $y_{k_0}$ et $Ae^{ct}\sin(e^{-ct}y_{k_0}(t) + k_0)$ reposent dans $L^2(]-\infty,l],\mathrm{d}t)$ et que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est telle que $e^{ct}f(t)|_{]-\infty,l]} \in L^2(]-\infty,l],\mathrm{d}t)$, il suivra de l'équation (3.2) que $y''_{k_0}(t) \in L^2(]-\infty,l],\mathrm{d}t)$. Suite à l'équation (3.3), nous aurons que $y'_{k_0}(t)$ peut être choisie continue et par l'équation (3.2), $y''_{k_0}(t)$ sera continue lorsque f est continue. Donc, on montre qu'il existe $k_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\Pi_{(e^{ct}B)^{\perp}}\left[e^{ct}f(t) - Ae^{ct}\sin(e^{-ct}y_{k_0} + k_0)\right] = 0 \tag{3.4}$$

Nous aurons alors montré l'existence d'une fonction continûment différentiable $y(t) = y_{k_0}(t) + e^{ct}k_0 \in e^{ct}H_l(\Gamma)$ où $y''(t) \in L^2(]-\infty,l],\mathrm{d}t)$ telle que (3.1) est satisfaite presque partout sur $]-\infty,l]$ ( et uniquement lorsque $A < c^2$ ).

*Note*: $\widetilde{\sin}(y(t)) = \widetilde{\sin(y(t))}$ et $\overline{\sin}(y(t)) = \overline{\sin(y(t))}$

Puisque

$$\begin{aligned}&e^{ct}f(t) - Ae^{ct}\sin(e^{-ct}y_{k_0} + k_0) \\ &\qquad = (e^{ct}\tilde{f}(t) - Ae^{ct}\widetilde{\sin}(e^{-ct}y_{k_0} + k_0)) + (e^{ct}\overline{f}(t) - Ae^{ct}\overline{\sin}(e^{-ct}y_{k_0} + k_0))\end{aligned}$$

où

$$(e^{ct}\tilde{f}(t) - Ae^{ct}\widetilde{\sin}(e^{-ct}y_{k_0})) \quad = \quad \Pi_{(e^{ct}B)}\,(e^{ct}\tilde{f}(t) - Ae^{ct}\widetilde{\sin}(e^{-ct}y_{k_0}))$$

et

$$\Pi_{(e^{ct}B)^\perp}\,(e^{ct}f(t) - Ae^{ct}\sin(e^{-ct}y_{k_0} + k_0)) \quad = \quad \Pi_{(e^{ct}B)^\perp}\,(e^{ct}\overline{f}(t) - Ae^{ct}\overline{\sin}(e^{-ct}y_{k_0} + k_0)),$$

pour obtenir l'équation (3.4) il est suffisant de montrer que:

$$e^{ct}\overline{f}(t) - Ae^{ct}\overline{\sin}(e^{ct}y_{k_0} + k_0) = 0 \tag{3.5}$$

pour un $k_0 \in \mathbb{R}$. Pour montrer cette égalité, nous avons besoin du résultat suivant:

**Théorème 8** *Si $0 < A < c^2$, alors $y_k$ converge faiblement dans $e^{ct}\widetilde{H}_l(\Gamma)$ vers $y_{k_0}$ lorsque $k \to k_0$.*

**Démonstration**: Sans perte de généralité, supposons $y_k \neq 0$. Si on pose $\varphi(\lambda) \equiv \Phi_k(\lambda y_k)$ et qu'on répète l'argument de la démonstration du Théorème 7, alors on obtient la dérivée

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}(\lambda) &= \;<(\lambda y_k + e^{ct}k)', y_k'>_l + c^2 <\lambda y_k + e^{ct}k, y_k>_l + <e^{ct}f, y_k>_l \\ &\quad -A < e^{ct}\sin(e^{-ct}\lambda y_k + k), y_k>_l \\ &= \lambda\big[<y_k', y_k'>_l + c^2 <y_k, y_k>_l\big] + \big[<(e^{ct}k)', y_k'>_l + c^2 <e^{ct}k, y_k>_l\big] \\ &\quad + <e^{ct}f, y_k>_l - A <e^{ct}\sin(e^{-ct}\lambda y_k + k), y_k>_l\end{aligned}$$

et donc l'inégalité $|\sin(e^{-ct}\lambda y_k + k)| \leq |e^{-ct}\lambda y_k + k|$ produit

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi}(1) &\geq \left[ < y_k', y_k' >_l + c^2 < y_k, y_k >_l \right] + \left[ < (e^{ct}k)', y_k' >_l + c^2 < e^{ct}k, y_k >_l \right] \\
&\quad + < e^{ct}f, y_k >_l - A < e^{ct}|e^{-ct}y_k + k|, |y_k| >_l \\
&\geq \left[ < y_k', y_k' >_l + c^2 < y_k, y_k >_l \right] + \left[ < (e^{ct}k)', y_k' >_l + c^2 < e^{ct}k, y_k >_l \right] \\
&\quad + < e^{ct}f, y_k >_l - A < |y_k + e^{ct}k|, |y_k| >_l \ .
\end{aligned}$$

Puisque $|y_k + e^{ct}k| \leq |y_k| + |e^{ct}k|$, on a

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi}(1) &\geq \left[ < y_k', y_k' >_l + c^2 < y_k, y_k >_l \right] + \left[ < (e^{ct}k)', y_k' >_l + c^2 < e^{ct}k, y_k >_l \right] \\
&\quad + < e^{ct}f, y_k >_l - A\left[ < |y_k|, |y_k| >_l + < |e^{ct}k|, |y_k| >_l \right] \\
&\geq \left[ < y_k', y_k' >_l + (c^2 - A) < y_k, y_k >_l \right] + \left[ < (e^{ct}k)', y_k' >_l + c^2 < e^{ct}k, y_k >_l \right] \\
&\quad + < e^{ct}f, y_k >_l - A < e^{ct}|k|, |y_k| >_l \\
&\geq \left[1 \wedge (c^2 - A)\right] \|y_k\|_l^2 - \left[ | < (e^{ct}k)', y_k' >_l | + c^2 | < e^{ct}k, y_k >_l | \right] \\
&\quad - | < e^{ct}f, y_k >_l | - A < e^{ct}|k|, |y_k| >_l \\
&\geq \left[1 \wedge (c^2 - A)\right] \|y_k\|_l^2 - \left[ < (e^{ct}k)', (e^{ct}k)' >_l^{1/2} < y_k', y_k' >_l^{1/2} \right. \\
&\quad \left. + c^2 < e^{ct}k . e^{ct}k >_l^{1/2} < y_k, y_k >_l^{1/2} \right] - < e^{ct}f, e^{ct}f >_l^{1/2} < y_k, y_k >_l \\
&\quad - A < e^{ct}k, e^{ct}k >_l^{1/2} < y_k, y_k >_l^{1/2} \ .
\end{aligned}$$

Aussi, puisque $\|y_k\|_l^2 = \left[ < y_k', y_k' >_l + < y_k, y_k >_l \right]$ on a que $\|y_k\|_l^2 \geq < y_k', y_k' >_l$ et $\|y_k\|_l^2 \geq < y_k, y_k >_l$, d'où

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi}(1) &\geq \left[1 \wedge (c^2 - A)\right] \|y_k\|_l^2 - (1 + c^2 + A)\|e^{ct}k\|_l \|y_k\|_l \\
&\quad - < e^{ct}f, e^{ct}f >_l^{1/2} \|y_k\|_l \\
&= \|y_k\|_l \left[(1 \wedge (c^2 - A))\|y_k\|_l - (1 + c^2 + A)\|e^{ct}k\|_l - < e^{ct}f, e^{ct}f >_l^{1/2}\right] .
\end{aligned}$$

Ainsi, $\dot{\varphi}(1) > 0$ ( et donc $y_k$ n'est pas un minimum relatif pour $\Phi_k$ ) lorsque

$$\|y_k\|_l > \frac{1}{(1 \wedge (c^2 - A))}\left[(1 + c^2 + A)\|e^{ct}k\|_l - < e^{ct}f, e^{ct}f >_l^{1/2}\right].$$

Donc, la suite de points $y_k$ est dans une boule fermée bornée ( faiblement compact ) dans $(e^{ct}\widetilde{H}_l(\Gamma), \|\cdot\|_l)$ lorsque $k \to k_0$. Ainsi, il existe une sous-suite $\{y_{k_n}\}$ qui converge faiblement vers un élément $y_0 \in e^{ct}\widetilde{H}_l(\Gamma) \subset e^{ct}B$ lorsque $k_n \to k_0$. Mais, pour tout $k_n \in \mathbb{R}$ donné, $y_{k_n}$ est l'élément de $e^{ct}\widetilde{H}_l(\Gamma)$ pour lequel

$$\begin{aligned}
&< (y_{k_n} + e^{ct}k_n)', v' >_l + c^2 < y_{k_n} + e^{ct}k_n, v >_l + < e^{ct}f, v >_l \\
&\quad - A < e^{ct}\sin(e^{-ct}y_{k_n} + k_n), v >_l = 0
\end{aligned}$$

pour tout $v \in e^{ct}\widetilde{H}_l(\Gamma)$.

À la limite, lorsque $n \to \infty$, on obtient

$$\begin{aligned}
&< (y_0 + e^{ct}k_0)', v' >_l + c^2 < y_0 + e^{ct}k_0, v >_l + < e^{ct}f, v >_l \\
&\quad - A < e^{ct}\sin(e^{-ct}y_0 + k_0), v >_l = 0
\end{aligned}$$

pour tout $v \in e^{ct}\widetilde{H}_l(\Gamma)$. Puisque, pour tout $k \in \mathbb{R}$ donné, $y = y_k$ est l'unique élément de $e^{ct}\widetilde{H}_l(\Gamma)$ qui satisfait

$$< (y+e^{ct}k)',v' >_l + c^2 < y+e^{ct}k,v >_l + < e^{ct}f,v >_l$$
$$-A < e^{ct}\sin(e^{-ct}y+k),v >_l = 0$$

pour tout $v \in e^{ct}\widetilde{H}_l(\Gamma)$, il suit que $y_0 = y_{k_0}$. ■

Puisque, d'après le Théorème 8, $y_k$ converge faiblement ( et donc ponctuellement ) vers $y_{k_0}$ lorsque $k \to k_0$ et $0 < \sqrt{A} < c$, il suit du théorème de la convergence dominée de Lebesgue, où $\left|e^{ct}\left[\sin(e^{-ct}y_k+k) - \sin(e^{-ct}y_{k_0})\right]\right|^2$ est dominée par $4e^{2ct}$, que

$$\begin{aligned}
&\frac{e^{2cl}}{2c}\left[\,\overline{\sin}(e^{-ct}y_k+k) - \overline{\sin}(e^{-ct}y_{k_0}+k_0)\right]^2 \\
&\quad = \int_{-\infty}^{l} \left|e^{ct}\left[\,\overline{\sin}(e^{-ct}y_k+k) - \overline{\sin}(e^{-ct}y_{k_0}+k_0)\right]\right|^2 \mathrm{d}t \\
&\quad = \int_{-\infty}^{l} \left|\Pi_{e^{ct}\mathbb{R}}\, e^{ct}\left[\sin(e^{-ct}y_k+k) - \sin(e^{-ct}y_{k_0})\right]\right|^2 \mathrm{d}t \\
&\quad \le \int_{-\infty}^{l} \left|e^{ct}\left[\sin(e^{-ct}y_k+k) - \sin(e^{-ct}y_{k_0})\right]\right|^2 \mathrm{d}t \\
&\quad \longrightarrow 0 \text{ lorsque } k \to k_0
\end{aligned}$$

et donc, $\overline{\sin}(e^{-ct}y_k+k)$ est une fonction continue ( à valeurs réelles ) de $k \in \mathbb{R}$. D'après l'unicité et la $2\pi$-périodicité du sinus, $y_k = y_{k+2\pi}$ pour tout $k \in \mathbb{R}$. Ainsi, $\overline{\sin}(e^{-ct}y_k+k)$ est une fonction continue $2\pi$-périodique de $k$ sur $\mathbb{R}$.

Donc, si $\overline{f}$ est telle que

$$\inf_k A\,\overline{\sin}(e^{-ct}y_k+k) < \overline{f} < \sup_k A\,\overline{\sin}(e^{-ct}y_k+k) \tag{3.6}$$

alors, tout sous-intervalle semi-ouvert de $\mathbb{R}$ de longueur $2\pi$ contient au moins deux valeurs de $k$ pour lesquelles $\overline{f} = A\ \overline{\sin}(e^{-ct}y_k + k)$ ( et donc pour lesquelles l'équation (3.5) est satisfaite ).

Si $\overline{f}$ est égale à l'une des bornes dans (3.6), alors il existe au moins une valeur de $k$ pour laquelle $\overline{f} = A\ \overline{\sin}(e^{-ct}y_k + k)$ et si $\overline{f}$ est à l'extérieur des bornes de (3.6), alors il n'y a aucune valeur de $k$ pour laquelle $\overline{f} = A\ \overline{\sin}(e^{-ct}y_k + k)$.

Notons que les deux bornes sont indépendantes de $l$ puisque $\overline{\sin}(e^{-ct}y_k + k)$ est indépendant de $l$ ( pour toute valeur de $k$ ). Donc, on obtient le résultat suivant sous la transformation $x = e^{-ct}y$.

**Remarque 4** *$y_k \in \widetilde{C}(\Gamma)$ est deux fois continûment différentiable.*

**Démonstration:** On a montré, dans les calculs de la section 3.1, qu'il existe $y_k \in e^{ct}\widetilde{H}_l(\Gamma)$ tel que $(y_k+e^{ct}k)'' - c^2(y_k+e^{ct}k) + Ae^{ct}\sin(e^{-ct}y_k) = e^{ct}f$ où $(y_k+e^{ct}k)'' \in L^2(]-\infty,l],dt)$. Or, $y_k$ et $f$ sont continues; donc on peut choisir $(y_k + e^{ct}k)''$ continue et conséquemment $y_k''$ continue. ■

Nous avons démontré le résultat suivant.

**Théorème 9** *Étant donné un groupe monogène $\Gamma \subset \mathbb{R}$ et $A,c \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \sqrt{A} < c$, alors pour tout $k \in \mathbb{R}$ et toute fonction $f \in C(\Gamma)$ il existe une unique fonction $x_k \in \widetilde{C}(\Gamma)$ deux fois continûment différentiable, dont la restriction à $]-\infty,l]$ est dans $\widetilde{H}_l(\Gamma)$, et pour laquelle la fonction $x = x_k$ minimise la fonctionnelle*

$$\int_{-\infty}^{l} e^{2ct}\left[x'(t)^2 + c^2x(t)^2 + 2x(t)f(t) + 2Acosx(t)\right]dt$$

*sur $\widetilde{H}_l(\Gamma) + k$ pour tout $l \in \mathbb{R}$.*

*De plus, si* $\inf_k A\,\overline{\sin}(x_k + k) < \overline{f} < \sup_k A\,\overline{\sin}(x_k + k)$ *alors, dans tout intervalle semi-ouvert de longueur* $2\pi$*, il y a au moins deux valeurs de* $k$ *pour lesquelles* $x = x_k + k$ *est une solution deux fois continument différentiable dans* $C(\Gamma)$ *de l'équation du pendule forcé sans conservation*

$$x'' + 2cx' + A\sin x = f.$$

*Aussi, il y a au moins une valeur de* $k$ *pour laquelle* $x = x_k + k$ *est une solution du même type lorsque* $\overline{f}$ *est égale à l'une des bornes.*

*Finalement, il n'y a aucune valeur de* $k$ *qui procure uen solution du type* $x_k + k$ *lorsque* $\overline{f}$ *est autrement que mentionné ci-haut.*

# CONCLUSION

Le but de ce mémoire était de montrer l'existence de solutions T-périodiques à l'équation du pendule forcé sans conservation et ce en utilisant les méthodes du calcul variationnel.

Nous avons tout d'abord travaillé avec les méthodes du calcul variationnel pour montrer que la fonctionnelle ( c'est-à-dire le potentiel ) associée à l'équation du pendule forcé sans conservation admettait des points critiques. Un argument sur la stricte convexité de la fonctionnelle nous a été essentiel pour en arriver à ce résultat. Il nous a alors fallu considérer des espaces de fonctions sur lesquels nous avons fait des projections pour arriver à montrer l'existence d'une fonction qui était une solution T-périodique de notre équation.

Bien que beaucoup de travail ait été effectué pour démontrer l'existence de solutions aux équations de type pendule, nous pouvons quand même nous demander si notre technique pourrait s'appliquer à celles-ci. Plusieurs variantes de l'équation du pendule forcé sans conservation seraient donc à considérer. Nous pouvons aussi laisser la porte ouverte en pensant que d'autres techniques pourraient être envisagées pour arriver aux mêmes résultats que dans ce mémoire. Il serait intéressant de réussir à trouver une technique s'appliquant à tous les différents types d'équations du pendule, technique qui se voudrait d'une complexité raisonnable compte tenu de la difficulté que pose le problème en soi.

# Bibliographie


[1] J.-M. Belley. Variational Methods and the Existence of Unique Solutions to the Nonconservative Forced Pendulum Equation. *Ann.Sci.Math. Québec 22*, (2):121–130, 1998.

[2] J.-M. Belley, G. Fournier, and J. Hayes. Existence of Almost Periodic Weak Type Solutions for the Conservative Forced Pendulum Equation. *J.Differential Equations 124*, (1):205–224, 1996.

[3] H. Brézis. *Analyse fonctionnelle, théorie et applications.* Masson, Paris., 1983.

[4] J. Douchet and B. Zwahlen. *Calcul différentiel et intégral 1, 2ième édition.* Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne., 1990.

[5] G.Fournier and J.Mawhin. On Periodic Solutions of forced Pendulum-Like Equations. *J.Differential Equations 60*, (3):381–395, 1985.

[6] G.J.O. Jameson. *Topology and Normed Spaces.* Chapman and Hall, London., 1974.

[7] J.Mawhin. *Problèmes de Dirichlet variationnels non linéaires.* Les Presses de l'Université de Montréal, Montréal., 1987.

[8] J.Mawhin and M.Willem. Multiple Solutions of the Periodic Boundary Value Problem for some forced Pendulum-Type Equations. *J.Differential Equation 52*, (2):264–287, 1984.

[9] Jean Mawhin and Michel Willem. *Critical Point Theory and Hamiltonian Systems.* Springer-Verlag, New York., 1989.

[10] A.Aït Ouassarah, J.-M.Belley, and G.Fournier. Note sur une méthode semi-variationnelle pour l'équation du pendule avec forcing périodique de moyenne non nulle. *Ann.Sci.Math. Québec 20*, (2):109–117, 1996.

[11] W. Rudin. *Functional Analysis.* Mc Graw-Hill, New York., 1973.

[12] Lay Taylor. *Introduction to Functional Analysis.* John Wiley and Sons. Inc., New York., 1980.

[13] John L. Troutman. *Variational Calculus with Elementary Convexity.* Springer-Verlag, New York., 1983.